Векторы на плоскости

Методическое пособие для обобщающего повторения учащихся 10-х классов

Разработал:
Глинский И.Ю.
Учитель математики
1 квалификационной категории
МБОУ г. Иркутска ВСОШ №1

Иркутск, 2025

Содержание

## Введение

Раздел **"Векторы на плоскости"** является одним из ключевых компонентов школьного курса математики, который не только формирует важные математические компетенции, но и имеет непосредственное практическое значение для успешной сдачи Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня.

Задачи по теме "Векторы" традиционно встречаются в задании №2 профильного ЕГЭ по математике. Это задание проверяет умение выполнять действия с векторами, находить их длины, скалярные произведения, определять углы между векторами и решать простейшие задачи на координатной плоскости.

По данным ФИПИ, задание по векторам (№2) относится к категории базовой сложности, но именно такие задания обеспечивают необходимый минимум баллов для преодоления порога и формирования уверенного результата на экзамене. Правильное решение этого задания приносит **1 первичный балл**, который может стать решающим при поступлении в вуз.

Векторный подход позволяет эффективно решать широкий класс геометрических задач, которые традиционными методами требуют более громоздких вычислений. В контексте подготовки к ЕГЭ освоение этой темы даёт учащимся **универсальный инструмент** для решения не только конкретного задания №2, но и для применения векторного метода в более сложных стереометрических задачах.

Данное методическое пособие предназначено для **целенаправленной подготовки** к выполнению экзаменационных заданий по векторам. Особое внимание уделяется именно тем аспектам, которые проверяются в ЕГЭ:

- **Нахождение координат вектора** по координатам его начала и конца
- **Вычисление длины вектора** (модуля)
- **Выполнение линейных операций** (сложение, вычитание, умножение на число)
- **Вычисление скалярного произведения** векторов
- **Определение угла** между векторами
- Решение задач на **коллинеарность и ортогональность** векторов

Методическая особенность пособия заключается в том, что каждый раздел содержит не только теоретический материал, но и типовые экзаменационные задачи с пошаговым разбором решений. Это позволяет учащимся не только понять теорию, но и научиться применять её в формате, максимально приближенном к реальному экзамену.

Структура пособия соответствует логике изучения темы в контексте подготовки к ЕГЭ: от простых определений и формул к комплексным задачам, объединяющим несколько тем. Особое внимание уделяется типичным ошибкам, которые допускают учащиеся при выполнении задания №2, и способам их избежать.

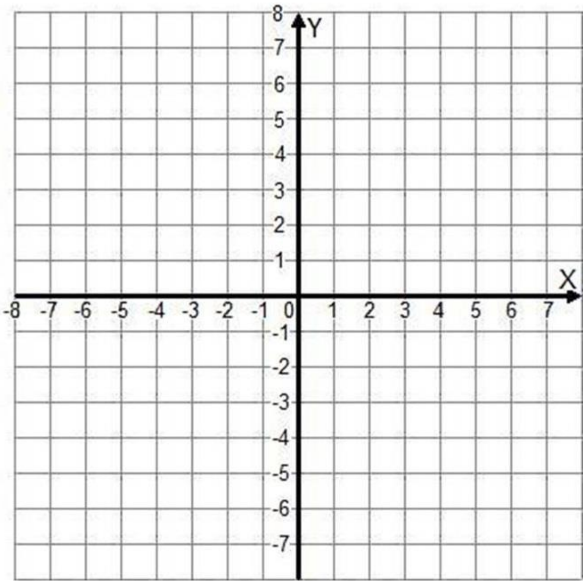
В приложениях пособия представлены сборник формул (Приложение 1), который можно использовать как шпаргалку при повторении, упражнения для самостоятельной работы (Приложение 2), составленные по аналогии с заданиями ЕГЭ, и ответы с решениями (Приложение 3) для самопроверки.

Успешное освоение материала данного пособия позволит учащимся:

- Гарантированно решать задание №2 на ЕГЭ по математике профильного уровня
- Сэкономить время на экзамене за счёт отработки навыков быстрого решения типовых задач
- Приобрести уверенность при решении геометрических задач векторным методом
- Заложить прочную основу для изучения стереометрии в 10-11 классах
- Развить пространственное мышление и алгебраическую культуру

1. Метод координат на плоскости

Две взаимно перпендикулярные прямые с общим началом координат и заданными единичными отрезками образуют Декартову (прямоугольную) систему координат на плоскости



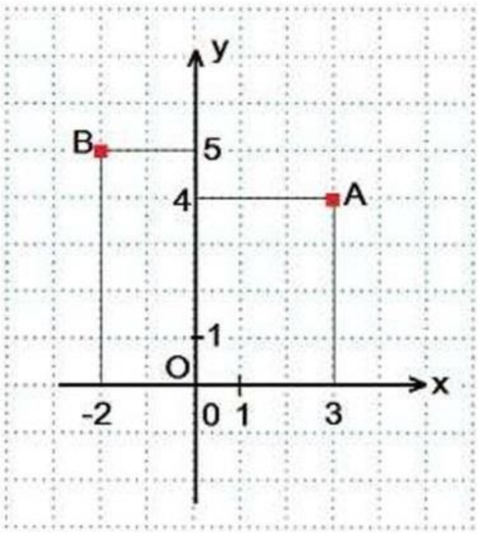

Ось $x$ называют осью абсцисс – расположена горизонтально, направлена вправо.

Ось $\boldsymbol{y}$ называют осью ординат – расположена вертикально, направлена вверх.

Точку пересечения осей называют началом координат.

Каждая точка на координатной плоскости имеет координаты по оси абсцисс и оси ординат. Обозначается $A(x;y)$.

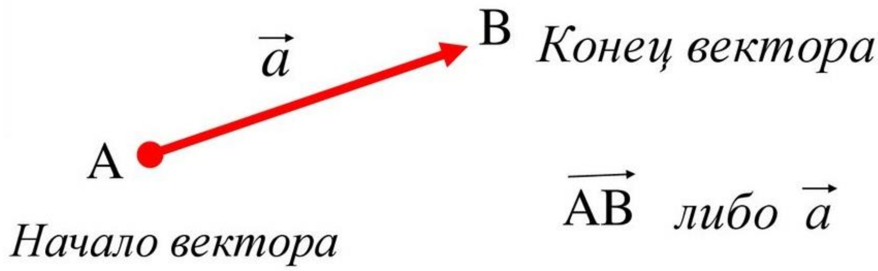
На рисунке ниже изображена Декартова система координат с отмеченными точками $A(3;4)$ и $B(-2;5)$



## 2. Основные понятия и определения

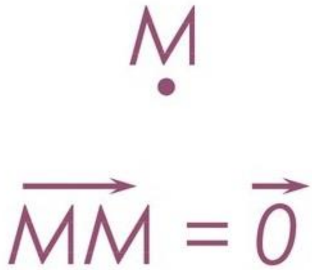
Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются скалярными. Например, площадь, длина, объем, работа и т. д. Другие величины определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Например, сила, скорость и т. д. Такие величины называют векторными.

***Определение 1.*** Вектором называется направленный отрезок прямой. Обозначается $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$.



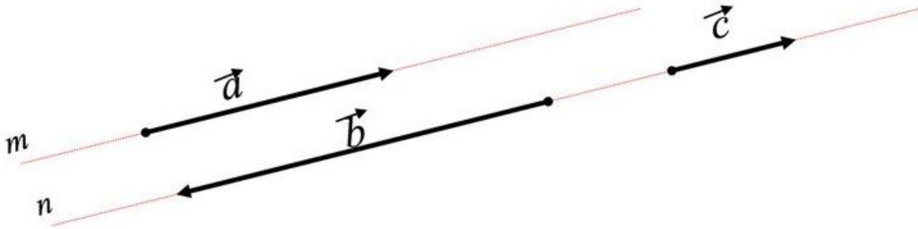

***Определение 2.*** Модуль (длина) вектора – длина порождающего вектор отрезка. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

***Определение 3.*** Нулевой вектор – это вектор, начало и конец которого совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю, направление он не имеет.

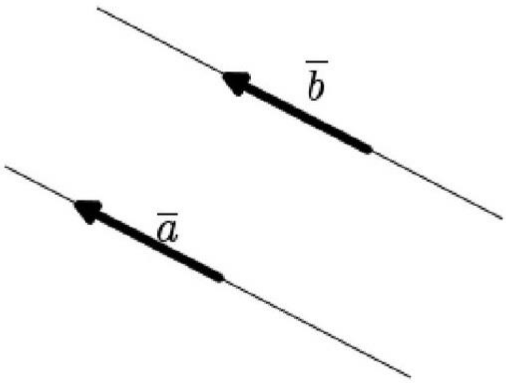



***Определение 4.*** Единичный вектор – это вектор, длина которого равна 1.

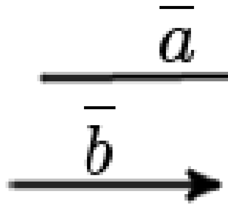
***Определение 5.*** Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Обозначается $\vec{a}||\vec{b}$.



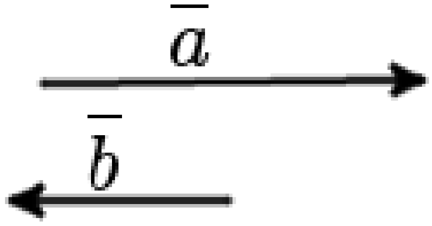

***Определение 6.*** Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и направление.



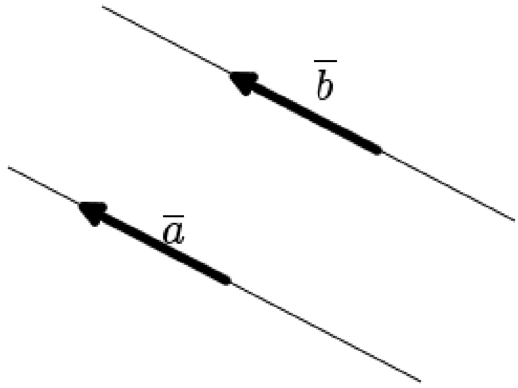

***Определение 7.*** Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными векторами, если их направления совпадают: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.




***Определение 8.*** Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются противоположно направленными векторами, если их направления противоположны: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

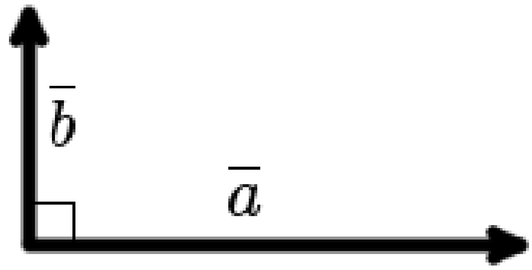



***Определение 9.*** Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они лежат на одной или параллельных прямых, их направления совпадают, а длины равны.




То есть, два вектора равны, если они коллинеарные, сонаправленые и имеют равные длины: $\vec{a} = \vec{b},$ если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

***Определение 10.*** Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если угол между ними равен *90°*.




***Условие ортогональности векторов:***

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны (перпендикулярны), если их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

## 3. Действия с векторами

### 3.1. Способы задания векторов

Вектор может быть задан двумя способами:

1. Координатами вектора $\vec{a} = \{x; y\}$

   В этом случае подразумевается, что начало вектора лежит в точке пересечения оси абсцисс и ординат, т.е. в точке начала координат $\mathrm{O}(0; 0)$.

2. Координатами точек вектора $|\overrightarrow{AB}|$, где $\mathrm{A}(x; y)$ – начало вектора, и $B(x; y)$ – конец вектора

### 3.2. Вычисление длины (модуля) вектора

Если вектор задан координатами, то длина (модуль) вектора вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Если вектор задан точками, то длина (модуль) вектора вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

где $x_A$ и $y_A$ – координаты точки $A(x; y)$
где $x_B$ и $y_B$ – координаты точки $B(x; y)$

Пример 1. Вычислить длину (модуль) вектора $\vec{a} = \{3; 4\}$.

Решение:

Т.к. вектор задан координатами, то длина вектора определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставим координаты вектора в формулу:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5.

Пример 2. Вычислить длину (модуль) вектора $|\overrightarrow{AB}|$, где точка начала вектора $A(2; 3)$, а точка конца вектора $B(8; 11)$

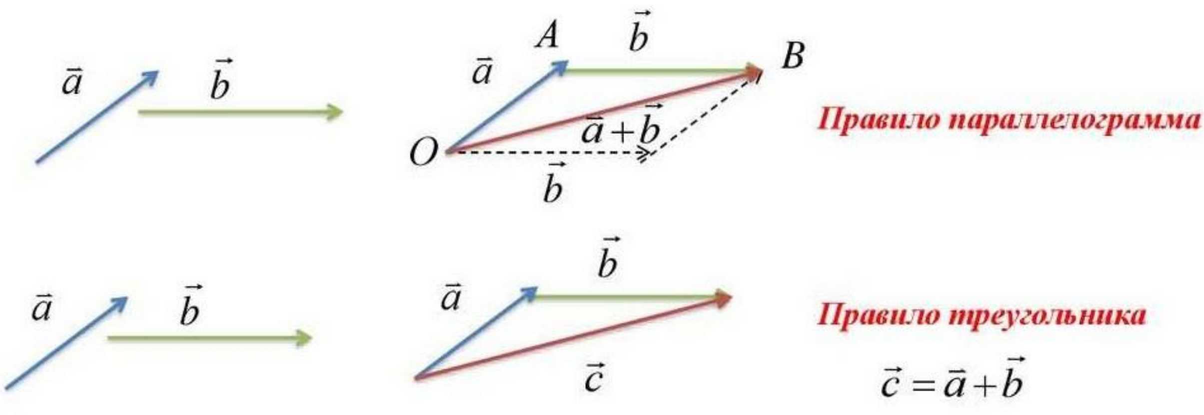
Т.к. вектор задан точками, то длина вектора определяется по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Подставим координаты точек в формулу:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} == \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: 10.

### 3.3. Линейные операции над векторами

1. Сложение и вычитание векторов




***Определение 11.*** Сложение (сумма) векторов «$\vec{a} + \vec{b}$» — это операция вычисления вектора $\vec{c}$, все элементы которого равны попарной сумме соответствующих элементов векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть каждый элемент вектора с равен: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

***Определение 12.*** Вычитание (разность) векторов «$\vec{a} - \vec{b}$» — это операция вычисления вектора $\vec{c}$, все элементы которого равны попарной разности соответствующих элементов векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть каждый элемент вектора **c** равен: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
Пример 1. Найти сумму векторов $\vec{a} = \{1; 2\}$ и $\vec{b} = \{4; 8\}$.
Решение:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1 + 4; 2 + 8\} = \{5; 10\}$$

Ответ: $\{5; 10\}$

Пример 2. Найти разность векторов $\vec{a} = \{1; 2\}$ и $\vec{b} = \{4; 8\}$.
Решение:

$$\vec{a} - \vec{b} = \{1 - 4; 2 - 8\} = \{-3; -6\}$$

Ответ: $\{-3; -6\}$

2. Умножение вектора на число

***Определение 13(Алгебраический смысл).*** Произведение ненулевого вектора на число - это вектор, координаты которого равны соответствующим координатам данного вектора, умноженным на число.
***Определение 14(Геометрический смысл).*** Произведение ненулевого вектора на число - это вектор, коллинеарный данному (сонаправленный данному, если число положительное, имеющий противоположное направление, если число отрицательное), а его модуль равен модулю данного вектора, умноженному на модуль числа.
Умножение вектора на число производится по формуле:

$$k \cdot \vec{a} = \{k \cdot a_x \, ; k \cdot a_y\}$$

**Свойства вектора умноженного на число**

Если вектор $\vec{b}$ равен произведению ненулевого числа $k$ и ненулевого вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, тогда:

- $\vec{b} \,||\, \vec{a}$ - вектора $\vec{b}$ и $\vec{a}$ параллельны
- $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k > 0$ - вектора $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправленные, если число $k > 0$
- $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$ - вектора $\vec{b}$ и $\vec{a}$ противоположно направленные, если число $k < 0$
- $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ - модуль вектора $\vec{b}$ равен модулю вектора $\vec{a}$ умноженному на модуль вектора $k$.

Пример. Найти произведение вектора $\vec{a} = \{1;\ 2\}$ на 3.
Решение:

$$3 \cdot \vec{a} = \{3 \cdot 1;\ 3 \cdot 2\} = \{3;\ 6\}.$$

Ответ: $\{3;\ 6\}$

3. Скалярное произведение векторов

***Определение 15(Алгебраический смысл).*** Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет скалярная величина, равная сумме попарного произведения координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
***Определение 16(Геометрический смысл).*** Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

**Свойства скалярного произведения векторов**

*1.* Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нуля:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$$

*2.* Скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор равен нулевому вектору:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = 0$$

*3.* Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

*4.* Операция скалярного умножения коммуникативна:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

*5.* Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:

$$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

*6.* $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

*7.* Операция скалярного умножения дистрибутивна:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1;\ 2\}$ и $\vec{b} = \{4;\ 8\}$.

Решение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20.$$

Ответ: 20.

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их длины $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, а угол между векторами равен $60^\circ$.

Решение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\alpha = 3 \cdot 6 \cdot cos\, 60^\circ = 9$$

Ответ: 9.

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов $p = a + 3b$ и $q = 5a - 3\,b$, если их длины $|a| = 3$, $|b| = 2$, а угол между векторами $a$ и $b$ равен $60^\circ$.

Решение:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 3\vec{b}) = 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 15\vec{b} \cdot \vec{a} - 9\vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= 5|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 9\left|\vec{b}\right|^2 = 5 \cdot 32 + 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot cos60^\circ - 9 \cdot 22 == 45 + 36 - 36 = 45.$$

Ответ: 45.

## 4. Ортогональность векторов

Для векторов $\vec{a} = \{x;\ y\}$ и $\vec{b} = \{x; y\}$, условие ортогональности запишется следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$$

Пример 1. Доказать что вектора $\vec{a} = \{1; 2\}$ и $\vec{b} = \{2; -1\}$ ортогональны.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0$$

Ответ: так как скалярное произведение равно нулю, то вектора $a$ и $b$ ортогональны.

Пример 2. Проверить являются ли вектора $a = \{3; -1\}$ и $b = \{7; 5\}$ ортогональными.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$a \cdot b = 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 5 = 21 - 5 = 16$$

Ответ: так как скалярное произведение не равно нулю, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не ортогональны.

Пример 3. Найти значение числа $n$ при котором вектора $a = \{2;\ 4\}$ и $b = \{n;\ 1\}$ будут ортогональны.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$a \cdot b = 2 \cdot n + 4 \cdot 1 = 2n + 4$$
$$2n + 4 = 0$$
$$2n = -4$$
$$n = -2$$

Ответ: вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут ортогональны при $n = -2$.

## 5. Коллинеарность векторов

### Условие коллинеарности векторов

***Условие коллинеарности векторов 1.*** Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует число $n$ такое, что $\vec{a} = n \cdot \vec{b}$

***Условия коллинеарности векторов 2.*** Два вектора коллинеарны, если отношения их координат равны, т.е. $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$.

Пример 1. Какие из векторов $a = \{1; 2\}$, $b = \{4; 8\}$, $c = \{5; 9\}$ коллинеарны?

Решение:

Так как вектора не содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся вторым условием коллинеарности, которое в случае плоской задачи для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ примет вид: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$.

Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны т.к. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны т.к. $\frac{1}{5} \neq \frac{2}{9}$.

Вектора $\vec{c}$ и $\vec{b}$ коллинеарны т.к. $\frac{5}{4} \neq \frac{9}{8}$.

Ответ: Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Пример 2. Доказать что вектора $a = \{0; 3\}$ и $b = \{0; 6\}$ коллинеарны.

Решение:

Так как вектора содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся первым условием коллинеарности, найдем существует ли такое число $n$ при котором:

$$\vec{b} = n\vec{a}$$

Для этого найдем ненулевой компонент вектора $\vec{a}$ в данном случае это $y_a$. Если вектора колинеарны то

$$n = \frac{y_b}{y_a} = \frac{6}{3} = 2$$

Найдем значение $n\vec{a}$:

$$n\vec{a} = \{2 \cdot 0; 2 \cdot 3\} = \{0; 6\}$$

Так как $\vec{b} = n\vec{a}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Пример 3. Найти значение параметра $n$ при котором вектора $a = \{3; 2\}$ и $b = \{9;\ n\}$ коллинеарны.

Решение:

Так как вектора не содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся вторым условием коллинеарности

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}.$$

Значит

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{n}$$

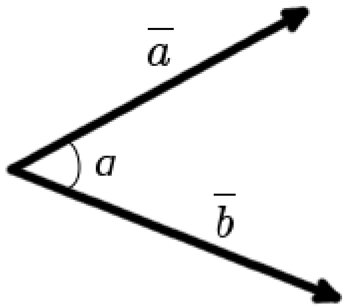
Решим это уравнение:

$$n = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$$

Ответ: вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны при $n = 6$.

## 6. Угол между векторами

***Определение 17.*** Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.




***Основное соотношение:*** Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение модулей векторов.

***Формула вычисления угла между векторами:***

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Пример 1. Найти угол между векторами $a = \{3; 4\}$ и $b = \{4; 3\}$.

Решение:

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$$

Найдем модули векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0.96$$

Ответ: $\cos\alpha = 0.96$

Пример 2. Найти угол между векторами $a = \{7; 1\}$ и $b = \{5; 5\}$.

Решение:

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 5 = 35 + 5 = 40$$

Найдем модули векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{40}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Ответ: $\cos\alpha = 0.8$

Список использованных источников


1. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных организаций / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 5-е изд. – Москва : Просвещение, 2023. – 384 с. : ил. – ISBN 978-5-09-091245-4.
2. Погорелов, А. В. Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных организаций / А. В. Погорелов. – 4-е изд. – Москва : Просвещение, 2022. – 240 с. : ил. – ISBN 978-5-09-091242-3.
3. Мерзляк, А. Г. Геометрия. 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – 3-е изд., перераб. – Москва : Вентана-Граф, 2021. – 256 с. : ил. – ISBN 978-5-360-11657-3.
4. Бутузов, В. Ф. Геометрия. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк и др. – Москва : Просвещение, 2022. – 144 с. : ил. – ISBN 978-5-09-091255-3.
5. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 5-е изд. – Москва : Просвещение, 2022. – 255 с. : ил. – ISBN 978-5-09-091238-6.
6. Александров, А. Д. Геометрия. 10-11 классы : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – 4-е изд. – Москва : Просвещение, 2020. – 255 с. : ил. – ISBN 978-5-09-073456-8.
7. Федеральный институт педагогических измерений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2023 года по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень) / ФИПИ. – Москва, 2022. – 32 с.
8. Сборник задач по геометрии. 7-9 классы : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / сост. Г. И. Ковалева, Н. И. Мазурова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Экзамен, 2022. – 208 с. – ISBN 978-5-377-17543-1.

## Приложение 1 – Основные формулы

| | |
|---|---|
| **Основные определения** | |
| $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ | Координаты вектора |
| $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A\}$ | Вектор по точкам A и B |
| $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ | Длина вектора |
| $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ | Длина по точкам |
| **Линейные операции** | |
| $\vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b; y_a + y_b\}$ | Сложение |
| $\vec{a} - \vec{b} = \{x_a - x_b; y_a - y_b\}$ | Вычитание |
| $k\vec{a} = \{kx_a; ky_a\}$ | Умножение на число |
| **Скалярное произведение** | |
| $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$ | В координатах |
| $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \cos\alpha$ | Геометрически |
| $\vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$ | Скалярный квадрат |
| **Угол между векторами** | |
| $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$ | Косинус угла |
| $\cos\alpha = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$ | В координатах |
| **Коллинеарность** | |
| $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$ | Условие 1 |
| $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ | Условие 2 |
| **Ортогональность** | |
| $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ | Основное условие |
| $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b = 0$ | В координатах |
| **Единичный вектор** | |
| $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ | Нормировка |
| $\vec{a_0} = \left\{\frac{x_a}{\lvert\vec{a}\rvert}; \frac{y_a}{\lvert\vec{a}\rvert}\right\}$ | В координатах |
| **Проекция вектора** | |
| $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ | Проекция на вектор |
| $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert \cos\alpha$ | Геометрический смысл |

Приложение 2 – Задания для самостоятельной работы

## Тема 1: Координаты и модуль вектора

| Задание | Условие задания |
|---|---|
| **Задание 1** | Даны точки $A(1;3)$ и $B(5;7)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину. |
| **Задание 2** | Вектор $\overrightarrow{a} = \{-4;3\}$. Найдите его длину. |
| **Задание 3** | Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2;1)$, $B(4;-3)$. |
| **Задание 4** | Вектор $\overrightarrow{a}$ имеет длину 5 и координаты $\{x;4\}$. Найдите $x$. |
| **Задание 5*** | Докажите, что для любого вектора $\overrightarrow{a} = \{x;y\}$ верно: $\lvert\overrightarrow{a}\rvert \geq 0$. |

## Тема 2: Линейные операции над векторами

| Задание | Условие задания |
|---|---|
| **Задание 1** | Даны векторы $\overrightarrow{a} = \{2;-1\}$, $\overrightarrow{b} = \{-3;4\}$. Найдите: а) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$; б) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$; в) $3\overrightarrow{a}$; г) $-2\overrightarrow{b}$. |
| **Задание 2** | Даны векторы $\overrightarrow{m} = \{1;5\}$, $\overrightarrow{n} = \{0;-2\}$. Найдите вектор $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}$. |
| **Задание 3** | Найдите вектор $\overrightarrow{x}$, если $\overrightarrow{x} + \{1;3\} = \{4;-1\}$. |
| **Задание 4*** | Векторы $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ коллинеарны. Известно, что $\overrightarrow{p} = \{6;-9\}$. Найдите $\overrightarrow{q}$, если известно, что он противоположно направлен вектору $\overrightarrow{p}$ и его длина равна 15. |
| **Задание 5*** | Даны точки $A(1;2)$, $B(3;5)$, $C(0;1)$. Найдите координаты точки $D$ так, чтобы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$. |

## Тема 3: Скалярное произведение и угол между векторами

| Задание | Условие задания |
|---|---|
| **Задание 1** | Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 4\}$. |
| **Задание 2** | Даны векторы $\vec{u} = \{-1; 2\}$ и $\vec{v} = \{3; 1\}$. Найдите косинус угла между ними. |
| **Задание 3** | Найдите угол между векторами $\vec{a} = \{1; \sqrt{3}\}$ и $\vec{b} = \{-\sqrt{3}; 1\}$. |
| **Задание 4*** | Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $\lvert\vec{a}\rvert = 2$, $\lvert\vec{b}\rvert = 5$, а их скалярное произведение равно -5. Найдите угол между этими векторами. |
| **Задание 5*** | При каком значении $k$ векторы $\vec{a} = \{k; 2\}$ и $\vec{b} = \{3; -4\}$ перпендикулярны? |

## Тема 4: Коллинеарность и ортогональность векторов

| Задание | Условие задания |
|---|---|
| **Задание 1** | Проверьте, коллинеарны ли векторы: а) $\{2; -3\}$ и $\{-4; 6\}$; б) $\{5; 0\}$ и $\{0; 1\}$. |
| **Задание 2** | При каком значении $m$ векторы $\{6; m\}$ и $\{-2; 3\}$ коллинеарны? |
| **Задание 3** | Проверьте, являются ли векторы $\{1; -2\}$ и $\{4; 2\}$ ортогональными. |
| **Задание 4*** | Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{12; -5\}$. |
| **Задание 5*** | Даны векторы $\vec{a} = \{2; -1\}$ и $\vec{b} = \{3; 6\}$. Найдите проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. |

Приложение 3 – Ответы к заданиям для самостоятельной работы

## Тема 1: Координаты и модуль вектора

| Задание | Ответ |
|---|---|
| Задание 1 | $\overrightarrow{AB} = \{4; 4\}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 4\sqrt{2}$ |
| Задание 2 | $\lvert\vec{a}\rvert = 5$ |
| Задание 3 | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 2\sqrt{13}$ |
| Задание 4 | $x = 3$ или $x = -3$ |
| Задание 5* | $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ |

## Тема 2: Линейные операции над векторами

| Задание | Ответ |
|---|---|
| Задание 1 | а) $\{-1; 3\}$; б) $\{5; -5\}$; в) $\{6; -3\}$; г) $\{6; -8\}$ |
| Задание 2 | $\vec{c} = \{2; 16\}$ |
| Задание 3 | $\vec{x} = \{3; -4\}$ |
| Задание 4* | $\vec{q} = \left\{-\frac{30}{\sqrt{13}}; \frac{45}{\sqrt{13}}\right\} \approx \{-8.32; 12.48\}$ |
| Задание 5* | $D(-2; -2)$ |

## Тема 3: Скалярное произведение и угол

| Задание | Ответ |
|---|---|
| Задание 1 | $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$ |
| Задание 2 | $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ |
| Задание 3 | $\alpha = 90^\circ$ $(\cos\alpha = 0)$ |
| Задание 4* | $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 120^\circ$ |
| Задание 5* | $k = \frac{8}{3}$ |

## Тема 4: Коллинеарность и ортогональность

| Задание | Ответ |
|---|---|
| Задание 1 | а) Да; б) Нет |
| Задание 2 | $m = -9$ |
| Задание 3 | Да $(1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 0)$ |
| Задание 4* | $\left\{\frac{12}{13}; -\frac{5}{13}\right\}$ или противоположный |
| Задание 5* | $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$ |