

Задачи про выбор шаров из урны или корзины.

В корзине находится K белых и $(N - K)$ чёрных шаров, всего N шаров. Из неё наудачу вынимают n шаров. Найти вероятность того, что будет выбрано ровно k белых и $(n - k)$ чёрных шаров.

Искомая вероятность находится по формуле:
$$P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

где C – число сочетаний.

Примечание:

1) число сочетаний из n объектов по k находят по формуле: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

2) $n!$ – факториал натурального числа n , равен произведению всех натуральных чисел от 1 до n . То есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Примеры решений задач о выборе шаров.

Задача 1.

В урне 9 белых и 6 чёрных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 3 белых шара.

Решение:

Выпишем значения параметров: $K = 9$ белых, $N - K = 6$ чёрных шаров, всего $N = 9 + 6 = 15$ шаров. Выбираем $n = 5$ шаров, из них $k = 3$ белых и $n - k = 5 - 3 = 2$ чёрных.

Находим три сочетания:

$$C_K^k = C_9^3 = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$$

$$C_{N-K}^{n-k} = C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$C_N^n = C_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$$

А теперь вероятность:

$$P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_9^3 \cdot C_6^2}{C_{15}^5} = \frac{84 \cdot 15}{3003} = \frac{1260}{3003} \approx 0,42$$

Ответ: 0,42.

Задача 2.

В корзине 6 белых и 7 красных шаров. Какова вероятность вытащить наудачу оба белых шара?

Решение:

Здесь шары не белые и чёрные, а белые и красные. Но на ход решения и ответ это не влияет.

Выпишем значения параметров: $K = 6$ белых, $N - K = 7$ красных шаров, всего $N = 6 + 7 = 13$ шаров. Выбираем $n = 2$ шара, из них $k = 2$ белых и $n - k = 2 - 2 = 0$ красных.

Находим три сочетания:

$$C_K^k = C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$C_{N-K}^{n-k} = C_7^0 = \frac{7!}{(7-0)! \cdot 0!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1} = 1$$

$$C_N^n = C_{13}^2 = \frac{13!}{(13-2)! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 78$$

А теперь вероятность:

$$P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_6^2 \cdot C_7^0}{C_{13}^2} = \frac{15 \cdot 1}{78} = 0,192.$$

Ответ: 0,192.

Задача 3.

В урне лежат 6 белых и 5 чёрных шаров. Из урны достали 2 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Решение:

Введём искомое событие $A =$ (Выбранные шары одного цвета).

Представим событие A в виде суммы двух несовместных событий:

$A = A_1 + A_2$, где

$A_1 =$ (Выбранные шары белого цвета),

$A_2 =$ (Выбранные шары чёрного цвета),

Выпишем значения параметров: $K = 6$ белых, $N - K = 5$ чёрных шаров, всего $N = 6 + 5 = 11$ шаров.

Для события A_1 :

Выбираем $n = 2$ шара, из них $k = 2$ белых и $n - k = 2 - 2 = 0$ чёрных.

Находим вероятность:

$$P(A_1) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_6^2 \cdot C_5^0}{C_{11}^2} = \frac{15 \cdot 1}{55} = 0,273.$$

Для события A_2 :

Выбираем $n = 2$ шара, из них $k = 0$ белых и $n - k = 2$ чёрных.

Находим вероятность:

$$P(A_2) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_6^0 \cdot C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{1 \cdot 10}{55} = 0,182.$$

Найдём вероятность искомого события $A = (\text{Выбранные шары одного цвета})$:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0,273 + 0,182 = 0,455.$$

Ответ: 0,455.

Самостоятельная работа

Решение задач о выборе шаров. Вариант 1.

№1°. А) В урне 4 красных и 6 черных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 2 черных шара.

Б) В урне 7 белых и 8 черных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 3 белых шара.

№2. В урне 7 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность вытащить наудачу 3 черных шара?

№3*. В корзине лежат 7 белых и 8 черных шаров. Из корзины достали 3 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Решение задач о выборе шаров. Вариант 2.

№1°. А) В урне 6 белых и 4 черных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 2 белых шара.

Б) В урне 5 белых и 10 красных шаров. Наудачу отобраны 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 4 красных шара.

№2. В урне 5 белых и 10 красных шаров. Какова вероятность вытащить наудачу 4 белых шара?

№3*. В корзине лежат 5 белых и 10 красных шаров. Из корзины достали 4 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Ответы к задачам самостоятельной работы:

Вариант/№ заданий	№1. А	№1. Б	№2	№3
1	0,24	0,33	0,123	0,2
2	0,57	0,42	0,004	0,158

Критерии оценивания:

№1. А) – 1 балл

№1. Б) – 1 балл

№2 – 1 балл

№3 – 2 балла

Оценка «5» - ставится за все правильно выполненные задания, 5 баллов;

Оценка «4» - 4 балла;

Оценка «3» - 3 балла.