

Теория вероятностей. Дерево возможных исходов или дерево вероятностей.

В вариантах ЕГЭ много задач следующего содержания – про анализ на гепатит, про куриные яйца из двух хозяйств, про магазин, где продаются стекла для фар бракованные и небракованные и т.д. Эти задачи можно решить с помощью дерева возможных исходов или дерева вероятностей.

Рассмотрим решение некоторых из них.

Задача №1. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05.

Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

Решение:

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате следующих событий: батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или батарейка исправна, но по ошибке забракована. Построим дерево вероятностей:



По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно: $0,98 \cdot 0,05$ и $0,02 \cdot 0,97$.

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно происходит), поэтому можно применить формулу полной вероятности.

Получим: $0,98 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,97 = 0,0684$.

Ответ: 0,0684.

Задача №2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стекол, а вторая – 3%.

Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

Изобразим все возможные исходы:



По условию, купленное в магазине стекло для автомобильной фары оказалось бракованным. Как это могло получиться?

Стекло сделано либо на первой фабрике, либо на второй. Эти события несовместны.

Вероятность того, что стекло с первой фабрики, равна 0,45.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике, равна 0,55.

Первая фабрика выпускает 1% бракованных стекол. Значит, с вероятностью 0,01 стекло, произведенное на первой фабрике, бракованное.

Вторая фабрика выпускает 3% бракованных стекол. Значит, с вероятностью 0,03 сделанное на ней стекло бракованное.

Покупатель купил бракованное стекло. Оно могло быть сделано на первой фабрике и оказалось бракованным. Вероятность произведения этих двух событий равна $0,45 \cdot 0,01$.

Или другой случай. Стекло могло быть со второй фабрики и также бракованное. Вероятность одновременного наступления этих двух событий равна $0,55 \cdot 0,03$. События «стекло с первой фабрики» и «стекло со второй фабрики» несовместны – они не могут случиться одновременно.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей.

Значит, вероятность купить бракованное стекло равна:
 $0,45 \cdot 0,01 + 0,55 \cdot 0,03 = 0,021$.

Ответ: 0,021.

Задача №3. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с

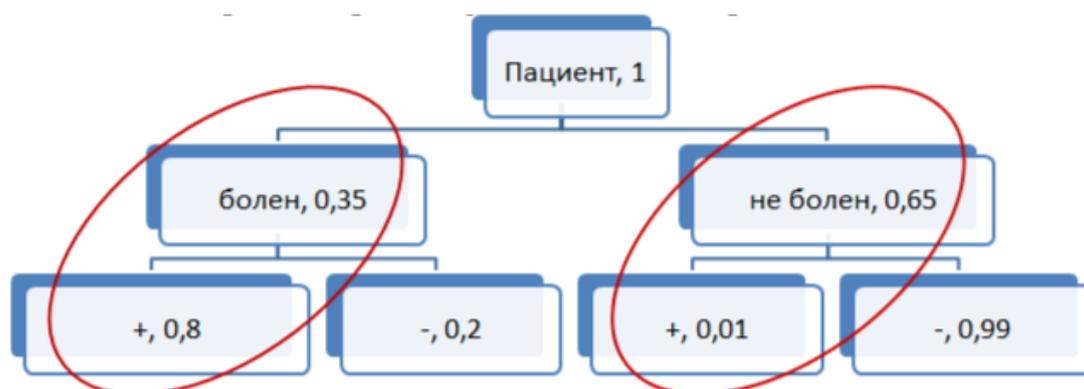
вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 35% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом.

Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение:

Пациент пришёл в клинику. С подозрением на гепатит. Возможно, он действительно болен гепатитом, а возможно – нет. Вероятность того, что он болен гепатитом, равна 0,35 (то есть 35%). Вероятность того, что он здоров, равна 0,65 (то есть 65%).

Пациенту делают анализ. Покажем на схеме все возможные исходы:



Если он болен гепатитом, анализ дает положительный (+) результат с вероятностью 0,8. То есть анализ покажет: «есть гепатит».

Заметим, что анализ не во всех случаях выявляет гепатит у того, кто действительно им болен. С вероятностью 0,2 анализ не распознает гепатит у больного.

Более того. Анализ может ошибочно дать положительный результат у того, кто не болеет гепатитом. Вероятность такого ложного положительного результата 0,01. Тогда с вероятностью 0,99 анализ даст отрицательный результат, если человек здоров.

Найдем вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Благоприятные для этой ситуации исходы: человек болен, и анализ положительный. Вероятность одновременного наступления этих двух событий равна $0,35 \cdot 0,8$. Или человек здоров, и анализ ложный положительный. Вероятность одновременного наступления этих двух событий равна $0,65 \cdot 0,01$.

Так как события «человек болен» и «человек не болен» несовместны, то вероятность того, что результат анализа будет положительным, равна

$$0,35 \cdot 0,8 + 0,65 \cdot 0,01 = 0,2865.$$

Ответ: 0,2865.

Задача №4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение:



Джон хватается пристрелянный револьвер (вероятность равна 0,3) **И** промахивается ($1-0,9 = 0,1$). Вероятность этого события равна: $0,3 \cdot 0,1$.

Джон хватается непристрелянный револьвер (вероятность равна 0,7) **И** промахивается ($1-0,2 = 0,8$). Вероятность этого события равна: $0,7 \cdot 0,8$.

Джон может схватить пристрелянный револьвер и промахнуться **ИЛИ** схватить непристрелянный и промахнуться. Поэтому искомая вероятность равна:

$$0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,8 = 0,59.$$

Ответ: 0,59.