МАТЕРИАЛЫ

ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 7-8 КЛАССОВ

ТЕМА: ОБЩИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДЕЛИМОСТЬ

Автор:

Кислая Юлия Петровна
учитель математики
первой категории
ГБУ ОО ЗО «Акимовская
СОШ№27 им. Г.И. Бояринова»
Акимовского района

2025

Эвристический метод обучения предполагает активное участие обучаемых в поиске решения проблем, поставленных преподавателем или самими учащимися. Несмотря на то, что подобный подход известен со времен Сократа, среди современных методов эвристический метод обучения – относительно новое явление.

Основные цель – пробудить у учащихся креативный подход к решению возникающих ситуаций.

Задачи педагога:

- задавать направление познавательной деятельности;
- мотивировать к самостоятельной работе;
- помогать в формировании личного опыта;
- способствовать творческой реализации;
- углубить знания учащихся о задачах на делимость;
- познакомить с основными видами задач на делимость, их особенностью и некоторыми способами решения;
- развивать логическое мышление;
- подготовить учащихся к участию в олимпиадах, конкурсах.

Эвристический метод обучения относится к категории активных методов обучения.

План:

1. Понятие и особенности задач на делимость.
2. Приемы поиска решения
2.1 Дедукция и индукция. Метод перебора.
2.2 Метод математической индукции.
2.3 Метод доказательства от противоположного
2.4 Поиск последней цифры числа.
2.5 Принцип Дирихле.
2.6 Принцип четности.
2.7 Принцип симметрии.
2.8 Принцип инварианта.
2.9 Принцип локализации.
3. Выводы.

1. **Понятие и особенности задач на делимость.**

Задачи на делимость популярны:

- ✓ на вступительных экзаменах в ВУЗах, специализированные физико-математические школы;
- ✓ на математических олимпиадах.

Постановка проблемного вопроса:

Почему задачи на делимость вызывают интерес?

Чрезвычайно простой формулировкой условия.

Особенности решения задач на делимость:

- не всегда простое:
- требуется развитого математического мышления;
- требует интуиции;
- алгоритмических методов решения задач такого типа не существует;
- можно выделить общие эвристические приемы поиска решения.

Приемы решения задач:

- Дедукция и индукция. Метод перебора.
- Метод математической индукции.
- Метод доказательства от противоположного
- Поиск последней цифры числа.
- Принцип Дирихле.
- Принцип четности.
- Принцип симметрии.
- Принцип инварианта.
- Принцип локализации.

2. **Приемы поиска решения**

***Первый тип:* Решение задач с помощью дедукции и индукции, методом перебора**

Одной из характерных черт математики является дедуктивное строение её теории. Слово «дедукция» означает «вывод». Дедуктивный метод или дедукция – это метод мышления, при котором частичные утверждения выводятся из общих утверждений (аксиом, теорем, правил).

Рассмотрим пример дедуктивного мышления.

Пусть нужно было доказать, что 7182233 цельно делится на 3.

Думаем так: по признаку деления на 3 каждое число, сумма цифр которого делится на 3; 7182233 – число, сумма цифр которого делится на 3. Значит, 7182233:3.

В математических исследованиях, на этапе поиска соответственных закономерностей, используются и другие методы мышления, например, индукция. Индуктивным называют общие утверждения (выводы), сделанные на основе частичных утверждений. Слово «индукция» означает «приведение». В математике индукция решает устанавливать теоремы, формулы, пути доказательства.

Различают полную и неполную индукцию.

Если общий вывод делается на основе всех возможных случаев, то такой метод мышления называется неполной индукцией.

Неполная индукция не является методом строгого математического доказательства. Выводы, сделанные на основе такой индукции, могут быть использованы только как гипотезы, которые должны быть доказанными другими методами.

Метод полной индукции является методом строго математического доказательства. Иногда его метод называют *методом перебора.*

Задача 1: Доказать, что сумма квадратов трех простых чисел, больших трех, является составным.

Решение: Каждое простое число $p\to\ 3$ можно выразить одним из двух способов: $p=3n+1$ или $p=3n-1$, $n \in N$. Поэтому $p^2=(3n\pm1)^2=3q+1$, где $q \in N$. Тогда $p_1^2+p_2^2+p_3^2+\ 3q_1+1+3q_2+1+3q_3+1=\ 3(q_1+q_2+q_3)+3=3l$, где $l\ \in N$. Понятно, что число составное.

Второй тип: **Решение задачи с помощью метода математической индукции.**

Этот метод является одним из самых основных методов объяснения математических утверждений, который зависят от натурального числа.

В основе этого метода лежит принцип математической индукции: если некоторое утверждение истинное при n=1 и с истинного выражения для любого натурального n=k выплывает его истинность для n=k+1, то это утверждение истинное для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции состоит из двух частей:

1) устанавливаем, что утверждение действительное при n=1;
2) предполагая, что утверждение действительное при n=k, доказываем его действительность при n=k+1.

После этого на основе принципа математической индукции делаем вывод, что утверждение истинное при любом n € N.

Задача 2: Доказать, что $(4^n+15n-1) \vdots 9$ при всех целых неотрицательных n.

Решение: 1) При n=0 $4^0+15\cdot 0-1 \vdots 9$;

3) Допустим, что утверждение истинное при n=k, то есть $(4^k+15k-1) \vdots 9$ и докажем, что при n=k+1 $(4^{k+1}+15(k+1)-1) \vdots 9$.

Имеем

$$4^{k+1}+15(k+1)-1=4\cdot 4^k+15k+14=4\cdot(4^k+15k-1)-45k+18=4\cdot(4^k+15k-1)-9(5k-2)$$

Тогда по теории про делимость разности $(4^{k+1}+15(k+1)-1) \vdots 9$.

Значит, при всех целых неотрицательных n утверждение верно.

Третий тип: **Решение задачи с помощью метода доказательства от противоположного.**

Доказательство правдивость утверждения «если А, то В» (А=>В) методом от противоположного значит вместо утверждения А=>В доказать одно равносильное ему утверждение:

1) из предложения действительности А и недействительности В вывести какие-нибудь два взаимно-противоположные утверждения;
2) из предложения действительности А и недействительности В прийти к выводу, что А неверное;
3) из предложения действительности А и недействительности В вывести, что В действительное.

<u>Задача 3:</u> Доказать, что равенство $3x^2 - 4y^2=13$ не имеет целых решений.

<u>Решение:</u> допустим противоположное, в смысле существуют целые числа x_0 и y_0, которые удовлетворяют данному уравнению. Тогда справедливые числовые равенства $3x_0^2 - 4y_0^2 = 13$ или $3(x_0^2 -1) - 4y_0^2 = 10$. Отсюда приходим к выводу, что x_0 не четное и, значит, $(x_0^2 -1) \vdots 4$. Поэтому и 10 должно быть кратным 4, что не верно. Значит, уравнение $3x^2 - 4y^2=13$ не имеет целых решений.

Четвертый тип: **Пример решения задачи с помощью поиска последней цифры числа.**

При установлении факта делимости во многих задачах достаточно знать последнюю цифру числа заданного числа.

Рассмотрим таблицу, в первом ряде которой записаны числа, которыми заканчивается запись натуральных чисел, во втором – цифры, которыми заканчиваются соответствующие квадраты, кубы и т.д.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
n^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
n^4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
n^5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Из таблицы видим, что пятая степень числа заканчивается такой же цифрой, что и первая, следовательно, результаты таблицы будут повторяться через 4 ряда.

Анализируя таблицу, можно сформулировать такой алгоритм нахождения последней цифры степени числа натуральным показателем:

1) найдем остаток от деления показателя на 4;
2) если остаток равен:
   - 1, то искомая цифра совпадает с последней цифрой основы степени;
   - 2, то искомая цифра равна последней цифре в записи квадрата основания;
   - 3, то искомая цифра равна последней цифре в записи куба основы;
   - 4, то для всех нечетных основ кроме числа, что заканчивается на 5, искомая цифра 1, для четных, кроме тех, что кратны 10, равняется на 6.

Задача 4: Доказать, что число $177^{99}+643^{44}+1994^{88}$ кратно 10.

Решение: Воспользуемся алгоритмом.

Имеем:

если, $99=4\cdot24+3$ то $177^{99} = \ldots3$

если, $44=4\cdot11+0$ то $643^{44} = \ldots1$

если, $88=4\cdot11+0$ то $1771994^{88} = \ldots6$

Таким образом, последняя цифра числа равна 10, поэтому

$$(177^{99}+643^{44}+1994^{88}) \vdots 10$$

Пятый тип: **Решение задачи с помощью принципа Дирихле.**

Если n+1 предметов разложить в n ящиков, то хотя бы в одном ящике будет не менее двух предметов. Верно, если бы в каждом ящике было бы по одному предмету, то их всего было б n, что противоречит условию.

Сформулированное утверждение называют принципом Дирихле, за имя известного немецкого математика XIX ст., который в своих исследованиях использовал этот логический приём.

Задача 5: Какое наименьшее количество чисел нужно взять, чтобы среди них всегда осталась такая пара чисел, разность которых делилась бы на 5.

Решение: Разобьем множество натуральных чисел на 5 групп: в первую группу отнесем все числа, которые при делении на 5 дают остаток 0, во второй группе – которые дают в остатке 1, в третьей группе – остаток 2, в четвертую – остаток 3, в пятую – остаток 4. Очевидно, что разница двух чисел, принадлежащих одной группе, делится на 5, а разница двух чисел, которые принадлежат разным группам, на 5 делиться не будет. Если взять 6 чисел, то среди них обязательно найдутся два числа, принадлежат одной группе, разность которых будет делится на 5.

Шестой тип: **Решение задачи с помощью принципа чётности.**

Задача 6: Имеет ли решение в натуральных числах уравнение $xy(x+1)(y+1)=1995$

Решение: Правая часть уравнения при любых, $y \in N$, $x \in N$ будет четным числом, а в левой части стоит нечетное. Значит, данное уравнение не имеет натуральных решений.

Седьмой тип: **Решение задачи с помощью принципа симметрии.**

Речь идет про особенный приём решения задачи на основе анализа условия на свойства симметрии. Такими свойствами, например, могут быть: симметрия в последовательности делителей натурального числа; симметрия в расположении коэффициентов многочлена и т.д.

Задача 7: Доказать, что когда число имеет нечетное количество делителей, тогда это число точный квадрат.

Решение: Воспользуемся фактором симметрии делителей натурального числа. Он состоит в том, что когда число d_1 является делителем числа N, то число $\frac{N}{d1}=d_2$ тоже является делителем числа N. Если число N имеет нечетное количество делителей, то, очевидно, для некоторого делителя m имеем $\frac{N}{m}=m$. Тогда $N=m^2$, что и надо было доказать.

Восьмой тип: **Решение задачи с помощью принципа инварианта.**

Понятие инварианта так же, как и понятия числа, множества, функции, является в математике одним из самых общих и основных. Инвариант значит «неизменный». Этим термином называют то, что основным образом связано с рассматриваемыми математическими объектами и остается неизменным при некоторых превращениях. Знания инварианта значительно облегчает решение задачи.

Задачи 8: Доказать, что когда уравнение $x^2+y^2=n$ имеет целочисленное решение, то уравнение $x^2+y^2=2n$ тоже имеет целочисленные решения.

Решение: Обозначим $p(x,y)=x^2+y^2$. Если (x_0,y_0) – целочисленное решение уравнения $x^2+y^2=n$, то $p(x_0,y_0)=x_0^2+y_0^2=n$. Найдем значение уравнение $p(x_0-y_0;\ x_0+y_0)$.

Имеем $(x_0-y_0)^2+(x_0+y_0)^2=x_0^2-2x_0y_0+y_0^2+x_0^2+2x_0y_0+ y_0^2=2(x_0^2+y_0^2)=2n$. Мы видим, что значение выражения x^2+y^2 является инвариантом с точностью до множителя 2 при замене пары (x_0,y_0) на пару $(x_0-y_0;x_0+y_0)$

Значит, если (x_0,y_0) – целочисленное решение $x^2+y^2=n$, то $(x_0-y_0;x_0+y_0)$ – целочисленное решение $x^2+y^2=2n$.

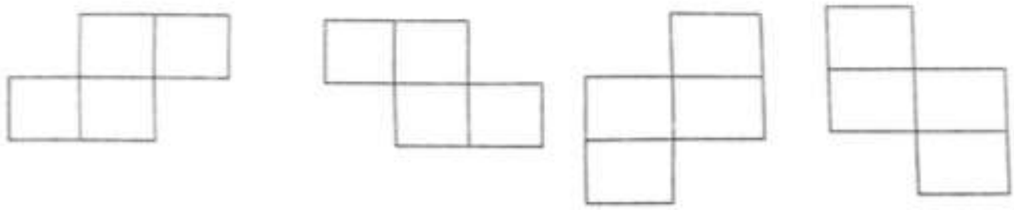
Девятый тип: **Решение задачи с помощью принципа локализации.**

При решении распространенных логических задач на листе в «клеточку» используется способ локализации (слово «локальный» значит «распространенный»). Суть этого принципа состоит в переходе от рассмотрения всей таблицы до рассмотрения всей фигуры, которая состоит из небольшого количества клеточек. При этом локальные особенности таблиц дают возможность сделать вывод о утверждении задачи в целом.

Принцип локализации не является алгоритмом. Поэтому его использование требует особой находчивости и опыта. Анализируя ситуации, которые при этом возникают, целесообразно учитывать комбинированные идем. Идеи, связанные с принципом Дирихле, чётность и др.

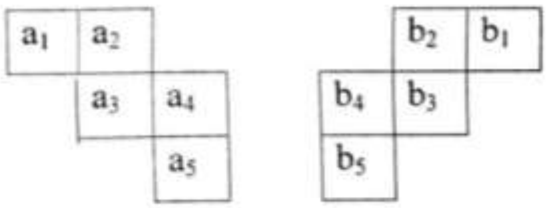
Задача 9: Можно ли в клеточках квадратной таблицы записать числа от 1 до 36 так, чтобы сумма чисел в любых четырех покрытых фигурой (рис.1) клеток делится на 9?

Решение: Допустим, что заданное размещение чисел уже существует. Выделим, что фигура, наложенная на таблицу, может занимать одно из четырех положений (рис.1). Рассмотрим фигуру, сложенные из клеток нашей таблицы (рис.2 а,б). При условии задания суммы $S_1=a_1+a_2+a_3+a_4$ и $S_2=a_2+a_3+a_4+a_5$ делится на 9. Значит, $S_1-S_2=a_1-a_5$, тоже делится на 9. Аналогично b_1 и $b5$ также дают одинаковые остатки при делении на 9. Значит, числа, которые записаны на противоположных углах любого квадрата 3×3,которые входят в состав таблицы, дают при делении на 9 одинаковые остатки. Тогда пять чисел, которые стоят, например, в заштрихованных клетках квадрата (рис.3), должны давать при делении на 9 одинаковые остатки. Но это невозможно, поскольку среди чисел 1,2,…,36 нет пяти таких чисел.



а) б) в) г)

Рис.1



а) б)

Рис.2

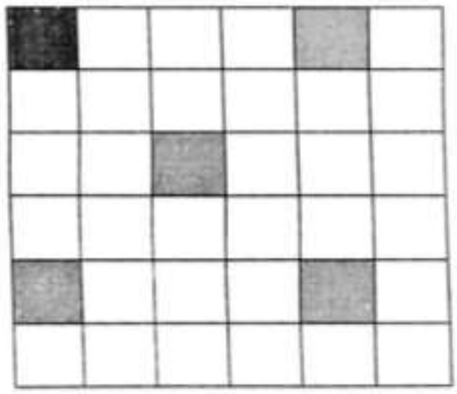


Рис.3

3.Выводы: нельзя приучать учащихся решать только те задачи, которые вызывают у них интерес. Но нельзя и забывать, что такие задачи учащийся решает легче и свой интерес к выполнению одной или нескольких задач он может в дальнейшем перенести и на «скучные» разделы, неизбежные при изучении любого предмета, в том числе и математики. Таким образом, учитель, желающий научить школьников решать задачи, должен вызывать у них интерес к задаче, убедить, что от решения математической задачи можно получить такое же удовольствие, как от разгадывания кроссворда или ребуса.

Решение нестандартной задачи – очень сложный процесс, для успешного осуществления которого учащийся должен уметь думать, догадываться. Необходимо также хорошее знание фактического материала, владение общими подходами к решению задач, опыт в решении нестандартных задач.

В процессе решения каждой задачи целесообразно четко разделять четыре ступени:

1) изучение условия задачи;
2) поиск плана решения и его составление;
3) осуществление плана, то есть оформление найденного решения;
4) изучение полученного решения –критический анализ результата решения и отбор полезной информации.

Особенностью умения решать задачи такого характера есть способность анализировать, сравнивать и обобщать, иметь интуицию и творческие способности.