Министерство образования Российской Федерации
МАОУ СОШ №35 имени А.Д. Безкровного
Краснодарский край г. Анапа

Методическая разработка урока

(математика 10 класс)

Тема: Определения и свойства степени с рациональным показателем, основные свойства степени

Учитель: кандидат экономических наук
Бобок Вероника Сергеевна

Анапа 2025

Методическая разработка урока

Учитель: Бобок Вероника Сергеевна МАОУ СОШ №35 г. Анапа

Предмет: Математика

Класс: 10

Тип урока: изучение нового материала, урок формирования первоначальных предметных навыков, овладения предметными умениями.

Тема урока: Определения и свойства степени с рациональным показателем, основные свойства степени.

Цель урока:

1. Расширить и углубить знания учащихся о степени числа; ознакомление учащихся с понятием степени с рациональным показателем и их свойствами;
2. Выработать знания, умения и навыки, вычислить значения выражений путем использования свойств;
3. Продолжить работу по развитию умений анализировать, сравнивать, выделять главное определять и объяснять понятия;
4. Формировать коммуникативные компетентности, умения аргументировать свои действия, воспитывать самостоятельность, трудолюбие.

Задачи:

- **обучающая**: формировать понятие степени с рациональным показателем, основные свойства степеней; применять свойства степеней с рациональным показателем при выполнении уравнений.
- **развивающая**: интеллектуальное, эмоциональное, личностное развитие ученика; развивать умение обобщать, систематизировать на основе сравнения, делать вывод; активизировать самостоятельную деятельность; развивать познавательный интерес.
- **воспитательная**: воспитание коммуникативной и информационной культуры обучающихся; эстетическое воспитание осуществляется через формирование умения рационально, аккуратно оформить задание на доске и в тетради.

Формы и методы обучения

Методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности:

1. Словесные, наглядные, практические;
2. Объяснительно-иллюстративные, поисковые, исследовательские, проблемные;
3. Индуктивные и дедуктивные.

- методы контроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности: устные, письменные проверки и самопроверки результативности овладения знаниями, умениями и навыками;
- методы стимулирования учебно-познавательной деятельности: определенные поощрения в формировании мотивации, чувства ответственности, обязательств, интересов в овладении знаниями, умениями и навыками.

Методические приемы:

- ответы на вопросы
- самостоятельная работа (тест)
- практический – решения математических и прикладных задач.

Оборудование и наглядные средства обучения:

- учебник «Алгебра и начала математического анализа», 10 – 11 класс, под редактурой Алимова;
- проектор, интерактивная доска, колонки, демонстрационный и раздаточный материал.

Структура учебного занятия

1. Организационный этап (1 минута)
2. Сообщение темы и цели урока (2 минуты)
3. Актуализация опорных знаний и способов действий (4 минуты)
4. Изучение нового материала (10 минут)
5. Закрепление изученного материала. Решение и преобразование выражений, содержащих радикалы и степени с дробными показателями (17 минут)

6. Самостоятельная работа на основе заданий из ЕГЭ (6 минут)

7. Этап первичной проверки понимания нового материала (5 минут)

8. Подведение итогов (2 минуты)

9. Задание на дом, комментирование (2 минуты)

10. Рефлексия (1 минута)

Ход урока

1. Организационный момент. Сообщение темы, целей урока.

Учитель: Добрый день, дорогие друзья! Вы являетесь учениками старшей школы и будете сдавать ЕГЭ, а чтобы на экзаменах у вас не было стресса, вы должны уже сейчас свободно выполнять задания из материалов ЕГЭ, уметь жестко работать во времени, контролировать свою деятельность, уметь методом прикидки и минимальной подготовки выполнять проверку, и тогда вы будете уверены в хорошем результате.

2. **Актуализация опорных знаний**

Повторение темы «Корень n-й степени», «Свойства степени с целым показателем»

Учитель: «Степень с натуральным показателем» в математике изучает понятие степени, где основание – любое число, а показатель натуральное число, больше 1. Степень показывает, сколько раз основание умножается само на себя. Основные свойства степеней с натуральным показателем включает в себя умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями, возведение степени в степень, а также возведение в степень произведения и частного.

Определение

Степень числа а с натуральным показателем n (где $n > 1$) называются произведение n множителей, каждый из которых равен a, записывается как $a^{n,}$ где a – основание степени, а n – показатель степени.

Свойства степени: Примеры:

$a^m * a^n = a^{m+n}$ $3^5 * 3^2 = 3^7$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^4 = 4$

$(a^m)^n = a^{m*n}$ $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

$a^n * b^n = (ab)^n$ $3^7 * 2^7 = 6^7$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ $\frac{4^5}{9^5} = (\frac{4}{5})^9$

Найти ошибку. (устно)

1. $a^n * a^m = a^{n-m}$
2. $a^n : a^m = a^{n:m}$
3. $(a^n)^m = a^{n+m}$
4. $(a * b)^n = a^{n-b}$
5. $a^0 = 0$
6. $a^{-n} = \frac{n}{a}$
7. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b}$

<u>Учитель</u>: Давайте вспомним, что квадратным корнем из числа a, называется такое число, квадрат которого равен a.

$\sqrt{81} = 9$ ($9^2 = 81$); $\sqrt{36} = 6$ ($6^2 = 36$);

$\sqrt[3]{27} = 3$ ($3^3 = 27$); $\sqrt{4} = 2$ ($2^2 = 4$)

Таким образом, корнем n-ой степени из числа a, называется число b, n-ая степень которого равна $\sqrt[n]{a} = b$, $b^n = a$. Здесь a и b - действительные числа, n – натуральное число ($n \geq 2$). При этом, число a называется подкоренным числом, а число n – показателем корня. Вместо слова «корень», часто говорят радикал. При $n = 2$ арифметический корень называется квадратным корнем, при $n = 3$ говорят о кубическом корне.

Например, корнем пятой степени из 32 является число 2, так как $2^5 = 32$ $3^4 = 81$, $2^6 = 64$, $3^3 = 27$, $2^4 = 16$.

<u>Основные свойства корней</u>

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
2. Корень из произведения

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

3.Умножение корней с разными основаниями и разными степенями

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m * b^n}$

4.Корень от частного

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, (b ≠ 0)

5. Деление корней с разными основаниями и разными степенями

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$, (b ≠ 0)

6. Возведение корня в степень

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

7. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

8. $(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

9. Если $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

10. Пусть m > n, если a > 1, то

$\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$; если 0 < a < 1, то

$\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$.

3. <u>Изучение нового материала</u>

Степень с рациональным показателем нужна для обобщения понятия степени и упрощения работы с корнями и дробями, а также для использования в различных математических и физических расчетах. Она позволяет компактно записывать выражения, содержащие корни, и применять свойства степеней для их упрощения и преобразования.

Для чего нужна степень с $\frac{m}{n}$ показателем:

1. <u>Упрощение выражений</u> – позволяет заменить корень дробной степенью, что делает запись более компактной и удобной для дальнейших математических операций.

2. <u>Математические расчеты</u> – используется в различных математических задачах, таких как решение уравнений, нахождение производных и интегралов, таких как функциональный анализ.

3. Расчёт в экономике и финансах – степень с рациональным показателем может использоваться в расчётах сложных процентов, дисконтировании, также в других финансовых приложениях.

Степень с рациональным показателем показывает выражение вида $a^{\frac{m}{n}}$, где a – положительное число, $\frac{m}{n}$ – рациональное число представленное в виде дроби, где m – целое число, а n – натуральное число, больше 1. Такое выражение можно интерпретировать как корень n – ой степени из a в степени m.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если $a > 0$.

Свойства степени с рациональным показателем

1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
4. $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$
5. $a^0 = 1$, где $a \neq 0$
6. $a^{-1} = \frac{1}{a}$
7. $a^1 = a$

Важно:

• Степень с рациональным показателем определена только для положительных оснований ($a > 0$);

• При работе со степенями с рациональным показателем можно использовать свойства, аналогичные свойствами степеней с целым показателем;

• при необходимости, рациональную дробь в показателе степени можно представить в виде десятичной дроби, если это упрощает вычисления.

Разберем примеры:

$32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(32)^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$

$3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 * 3} = 3\sqrt[5]{3}$

$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{272}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Пользуясь формулой $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, степень с показателем можно представить в виде корня и наоборот, так как $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, где n и k – натуральные числа, m – целое число, то при любом $a > 0$ справедливо равенство $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$.

Например,

$8^{\frac{5}{15}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

Можно сейчас показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

Для любых рациональных чисел p и y, и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p * a^y = a^{p+y}$
2. $a^p : a^y = a^{p-y}$
3. $(ab)^p = a^p b^p$
4. $(a^p)^k = a^{p*k}$
5. $(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$

В основе доказательства свойств лежат свойства корней

Докажем свойство 1.

Пусть $p = \frac{m}{n}$, $g = \frac{k}{e}$, где $n \in N$, $e \in N$, $m \in Z$, $k \in Z$, нужно доказать, что $a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{k}{e}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{e}}$.

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{e}$ к общему знаменателю, запишем левую часть полученного равенства в виде $a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{k}{e}} = a^{\frac{me}{ne} * \frac{kn}{ne}}$ используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем:

$a^{\frac{m}{n} * \frac{k}{e}} = a^{\frac{me}{ne} * \frac{kn}{ne}} = \sqrt[ne]{a^{me}} * \sqrt[ne]{a^{kn}} = \sqrt[ne]{a^{me} * a^{kn}} = \sqrt[ne]{a^{me+kn}} =$ a $\frac{me+ke}{ne} =$ a$\frac{m}{n} + \frac{k}{e}$

<u>Доказем свойство 4</u>.

Пусть p = $\frac{m}{n}$, g = $\frac{k}{e}$, где n ∊ N, e ∊ N, m ∊ Z, k ∊ Z, нужно доказать, что $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{k}{e}} = a^{\frac{mk}{nk}}$

По основному свойству дроби и определению степени с рациональным показателем $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{k}{e}} = (a^{\frac{me}{ne}})^{\frac{k}{e}} = (\sqrt[ne]{a^{me}})^{\frac{k}{e}}$. По одному из свойств арифметического корня $(\sqrt[ne]{a^{me}})^{\frac{k}{e}} = \sqrt[ne]{a^{me*k/e}} = \sqrt[ne]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{ne}}$.

<u>Приведем примеры применения свойств степени</u>

1) $16^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{6}} = 16^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 16^{\frac{4-1}{6}} = 16^{\frac{3}{6}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

2) $9^{\frac{1}{3}} : 9^{\frac{5}{6}} = 9^{\frac{2-5}{6}} = 9^{-\frac{3}{6}} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

3) $2^{\frac{2}{5}} * 2^{\frac{8}{5}} = 2^{\frac{2+8}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$

4) $5^{\frac{3}{8}} * 5^{\frac{5}{8}} = 5^{\frac{3+5}{8}} = 5^{\frac{8}{8}} = 5^1 = 5$

5) $(81^{1/3})^{\frac{9}{4}} = 81^{\frac{1}{3} * \frac{9}{4}} = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{4*3}{4}} = 3^3 = 27$

6) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 * 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3*2}{3}} * 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9}$

7) $(8^{\frac{1}{15}})^{-5} = 8^{\frac{1}{15}*(-5)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2}$

Представить в виде корня из степени с целым показателем

$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

$b^{-\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{b}}$

$b^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{b^5}$

$9y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$a^{-\frac{5}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^5}}$

$2y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2y}$

$(5b)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5y^3}}$

Закрепление изученного материала решение и преобразование выражений, содержащих и степени с дробным показателем

Учебник: Ш.А. Алимов Алгебра и начало математического анализа.

10-11 класс. – М.: Просвещение, 2001. – 464 с.

№ 57, 58, 59, 60, 61, 62 стр. 31

Работа у доски с комментированным решением:

1) $16^{-0,75} = 16^{-\frac{3}{4}} = 2^4 * (-\frac{3}{4}) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$9^{-\frac{1}{5}} = 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}} = \frac{1}{\sqrt{(3^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$32^{-\frac{2}{5}} = 2^5 * (-\frac{1}{9}) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$a^n * a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$

2) $5^{\frac{7}{2}} : 5^{\frac{8}{2}} = 5^{\frac{7-8}{2}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$9^{\frac{2}{5}} * 27^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{2*2}{5}} : 3^{\frac{3*2}{5}} = 3^{\frac{4}{5}} * 3^{\frac{6}{5}} = 3^{\frac{4+6}{5}} = 3^{\frac{10}{5}} = 3^2 = 9$

$7^{\frac{2}{3}} * 49^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{2}{3}} * 7^{\frac{2*2}{3}} = 7^{\frac{2}{3}} * 7^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{2+4}{3}} = 7^{\frac{6}{3}} = 7^2 = 49$

Найдите значение выражения

1) $a = 0,09$

$\sqrt[3]{a} * \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{3}} * a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2+1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} = 0,3$

2) b = 1,3

$\frac{\sqrt{b} * \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}} = \frac{b^{\frac{1}{2}} * b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}} = b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = b^{\frac{6}{6}} = b^1 = 1,3$

3) a=2,7

$\sqrt[3]{a} * \sqrt[4]{a} * \sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} * a^{\frac{1}{4}} * a^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{4+3+5}{12}} = a^{\frac{12}{12}} = a^1 = 2,7$

Представить в виде степени с рациональным показателем

1) $b^{\frac{1}{2}} * b^{\frac{1}{3}} * \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} * b^{\frac{1}{3}} * b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{3+2+1}{6}} = b^{\frac{6}{6}} = b$

2) $x^{1,7} * x^{2,8} : \sqrt{x^5} = x^{1,7} * x^{2,8} : x^{\frac{5}{2}} = x^{1,7+2,8-2,5} = x^2$

3) $y^{-3,8} : y^{-2,3} * \sqrt[3]{y} = y^{-\frac{38}{10}} : y^{-\frac{23}{10}} * y^{\frac{1}{3}} = y^{-\frac{38}{10}-\left(-\frac{23}{10}\right)+\frac{1}{3}} = y^{-\frac{38}{10}+\frac{23}{10}+\frac{1}{3}} = y^{-\frac{114+69+10}{30}} =$ $y^{-\frac{35}{30}} = y^{-\frac{7}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$

Вычислите №69 – 70 (учебник)

1. $2^{2-3\sqrt{5}} * 8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}} * 2^{3\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}} = 2^2 = 4$

2. $3^1 = 2^3\sqrt{2} : 9^{3\sqrt{2}} = 3^{1+2^3\sqrt{2}} : 3^{2^3\sqrt{2}} = 3^{1+2^3\sqrt{2}-2^3\sqrt{2}} = 3$

3. $(5^{1+\sqrt{5}})^{1-\sqrt{2}} = 5^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = 5^{1^2-(\sqrt{2})^2} = 5^{1-2} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2$

4. $9^{1+\sqrt{3}} * 3^{1-\sqrt{3}} * 3^{-2-\sqrt{3}} = (3^2)^{1+\sqrt{3}} * 3^{1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}} = 3^{2+2\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}} =$ $3^{2+2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}} = 3$

5. $4^{3+\sqrt{2}} * 2^{1-\sqrt{2}} * 2^{-4-\sqrt{2}} = (2^2)^{3+\sqrt{2}} * 2^{1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^{6+2\sqrt{2}} * 2^{-3-2\sqrt{2}} =$ $2^{6+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}} = 2^3 = 8$

Самостоятельная работа задания из ЕГЭ. Сборник Ященко.

Вариант I

1. $(8^5)^3 : (4^2)^9$

$\frac{4^{4,75}}{8^{2,5}}$

2. $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[5]{m} * \sqrt[20]{m}}$ m = 256

$\frac{\sqrt[3]{6} * \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{9}}$

3. $\frac{a^{5,96} * a^{2,4}}{a^{5,36}}$ a = 6

$\frac{8^{2,8} * 5^{3,2}}{20^{3,2}}$

4. $5^{\sqrt{3}-4} * 5^{1+3\sqrt{3}} : 5^{4\sqrt{3}-1}$

Вариант II

1. $(125^7)^3 : (25^4)^8$

$\frac{125^{3,2}}{25^{3,3}}$

2. $\frac{\sqrt[24]{a} * \sqrt[48]{a}}{a\sqrt[16]{a}}$ a = 2,5

$\frac{\sqrt[4]{18} * \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{6}}$

3. $\frac{a^{3,33}}{a^{2,11} * a^{2,22}}$ a = $\frac{2}{7}$

$\frac{14^{6,4} * 7^{-5,4}}{4^{4,2}}$

4. $2^{4\sqrt{10}-3} * 2^{1-3\sqrt{10}} : 2^{\sqrt{10}-1}$

Этап первичной проверки понимания нового материала

Выполняя задания, ученик допустил ошибки. Какие свойства, правила не знает ученик? Обсудите самостоятельно. Обсудите в парах. Обсудите вместе (на обратной стороне доски).

Работа в парах

Цель научиться применять умение преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем. Используйте свои навыки тождественных преобразований выражений, свойства степеней с рациональным показателем. Старайтесь лаконично и обосновано рассказать решение примера своему однокласснику. Ваша цель добиться, чтобы он знал ход Ваших преобразований при решении задачи. Выслушайте решение задачи своего одноклассника.

Подведение итогов

Вернемся к целям урока, которые себе поставили. Давайте отметим то, что у нас получилось из намеченного, что нового сегодня вы узнали?

- Уважаемый 10 класс, вы активно работали на разных этапах занятия. Ответы достаточно аргументировали, оперировали понятиями, сочетая теоретические знания с практическими, активно вносили поправки. Особенно старательно работали (Ф.И. ученика)

Домашнее задание

Пока ученики записывают домашнее задание, учитель проговаривает оценки за урок, обосновывает каждую оценку.

Учитель: Сегодня на уроке мы внесли очередной вклад в вашу подготовку к ЕГЭ, повторяя понятие степени с рациональным показателем. Урок закончен. Спасибо за урок!

Контрольная работа по теме «Степень с рациональным показателем»’

1в. **2в.**

№1 Вычислить.

1в.

А) $8^{\frac{5}{3}}$

Б) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{9}{2}}$

В) $4^{0,6}$ ***** $2^{0,2}$ **:** $2^{-0,6}$

Г) $\left(12-80^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ ***** $\left(12+80^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

2в.

А) $27^{\frac{2}{3}}$

Б) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{9}{2}}$

В) $4^{\frac{1}{3}}$ ***** $2^{1\frac{2}{3}}$ **:** $4^{\frac{-1}{3}}$

Г) $\left(9+73^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ ***** $\left(9-73^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

№2 Сократите дробь.

1в.

А) $\frac{a+3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+3}$

Б) $\frac{x-36}{x^{\frac{1}{2}}-6}$

2в.

А) $\frac{15x^{\frac{1}{2}}+x}{15+x^{\frac{1}{2}}}$

Б) $\frac{x-121}{x^{\frac{1}{2}}+11}$

№3 Упростите выражение и вычислите его значение

1в.

$\left(b^2 * b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} * \left(b^3 * b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{7}}$

При b=3

2в.

$\left(a^3 * a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} * \left(a^2 * a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{7}}$

При a=3

№4 Упростите выражение.

1в. $\left(\frac{a+b}{a^{1,5}-a^{0,5}b} - \frac{a-b}{a^{1,5}+a^{0,5}b}\right) * \frac{a^2-b^2}{a^{0,5}}$

2в. $\left(\frac{x-y}{x^{1,5}+x^{0,5}y} - \frac{x+y}{x^{1,5}-x^{0,5}y}\right) * \frac{y^2-x^2}{xy}$

Система тренировочных заданий по формированию навыка решения задач по теме «Степень с рациональным и действительным показателем»

I. Упражнения на отработку определения степени с рациональным показателем

№1. Найдите ошибку в записи степени с дробным показателем, исправьте ее:

1) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$, 2) $5^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[-7]{5^2}$, 3) $\sqrt[3]{2} = 2^3$, 4) $\sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{3}{4}}$,

5) $4^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4^5}$, 6) $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$,

7) $\sqrt[4]{6^{-3}} = 6^{\frac{4}{3}}$, 8) $\sqrt{6^{-3}} = 6^{\frac{-3}{2}}$.

Ответы:

номер задания	оценка	исправление неверной записи
1	верно	
2	неверно	$5^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^{-2}}$
3	неверно	$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
4	неверно	$\sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}}$
5	верно	
6	неверно	$3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$
7	неверно	$\sqrt[4]{6^{-3}} = 6^{\frac{-3}{4}}$
8	верно	

№2. Выясните, имеет ли смысл выражение? Запишите выражения в два столбца в таблицу

Выражение имеет смысл	Выражение **не** имеет смысла

1) $\sqrt[3]{-27}$; 2) $(-27)^{\frac{1}{3}}$; 3) $-3^{\frac{5}{8}}$; 4) $(-3)^{\frac{5}{8}}$; 5) $0^{\frac{5}{8}}$;

6) $23^{-\frac{3}{2}}$; 7) $0^{-\frac{3}{4}}$; 8) $(-2{,}3)^{-2}$; 9) $(-16)^{-\frac{3}{2}}$; 10) $(-\frac{1}{32})^{-\frac{1}{5}}$

Ответы:

Выражение имеет смысл	Выражение **не** имеет смысла
1) $\sqrt[3]{-27}$ 3) $-3^{\frac{5}{8}}$ 5) $0^{\frac{5}{8}}$ 6) $23^{-\frac{3}{2}}$ 8) $(-2{,}3)^{-2}$	2) $(-27)^{\frac{1}{3}}$ 4) $(-3)^{\frac{5}{8}}$ 7) $0^{-\frac{3}{4}}$ 9) $(-16)^{-\frac{3}{2}}$ 10) $(-\frac{1}{32})^{-\frac{1}{5}}$

№3. Установите соответствие между выражениями из первого и второго столбца

1) $(x-y)^{\frac{2}{3}}$ 2) $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ 3) $(x-y)^{\frac{3}{2}}$ 4) $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$	М) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$ О) $\sqrt[3]{(x-y)^2}$ Р) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$ Е) $\sqrt{(x-y)^3}$

Запишите ответы в таблицу

1	2	3	4

Ответы:

1	2	3	4
О	Р	Е	М

- Кодом является слово «ОРЕМ». Это фамилия французского философа, математика, механика, астронома, теолога.

Николай Орем (14 век) впервые использовал дробные показатели степени и наиболее простые действия со степенями и фактически вплотную подошёл к идее логарифмов. Николай Орем стал воспитателем дофина, будущего короля Франции Карла V. В механике объяснял суточное вращение земли, а не небесной сферы и сформулировал принцип относительности также как Галилей 17 веке.

II. Упражнения на вычисление степени с дробным показателем

Вычислите значение степени и запишите ответы в таблицу, расшифруйте кодовое слово

1) $125^{\frac{1}{3}}$; 2) $196^{0,5}$; 3) $49^{-\frac{1}{2}}$; 4) $(0,027)^{\frac{1}{3}}$;

5) $27^{\frac{2}{3}}$; 6) $(\frac{1}{81})^{\frac{3}{4}}$; 7) $(5\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$; 8) $(\frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}}$

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
Т	К	Р	И	Д	Е	А	Л

9	$\frac{1}{27}$	14	1,5	$\frac{1}{7}$	5

Ответы:

1) 5	2) 14	3) $\frac{1}{7}$	4) 0,3	5) 9	6) $\frac{1}{27}$	7) 1,5	8) $\frac{2}{3}$
Т	К	Р	И	Д	Е	А	А

9	$\frac{1}{27}$	14	1,5	$\frac{1}{7}$	5
Д	**Е**	**К**	**А**	**Р**	**Т**

- Кодом является слово «ДЕКАРТ».

Рене Декарт (31 марта 1596 г.- 11 февраля 1650 г.) – французский математик, философ, механик, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

Ему принадлежит высказывание: «Математика — мощный и универсальный метод познания природы, образец для других наук».

В трудах Декарта натуральный показатель степени принял современный вид (дробные и отрицательные утвердились благодаря Ньютону).

III. Упражнения на применение свойств степени.

Вычислите значение выражения и расположите ответы в порядке возрастания, запишите кодовое слово

И) $(3^{0,8})^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{1,3}$; Т) $81^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}}$; В) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$;

Е) $((\sqrt{6})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; Н) $(-2\sqrt[4]{2})^4$; С) $(3^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} - (\sqrt{5})^0$

Ответы:

И) 27; Т) 3; В) 9; Е) 6; Н) 32; С) 2.

- Кодовое слово «СТЕВИН»

Симон Стевин (16 век) – фламандский математик, механик, инженер. Ему принадлежит книга «*Десятая*» (*De Thiende*), изданная на фламандском и французском языках в 1585 г. Именно после неё в Европе началось широкое использование десятичных дробей. Предложил понимать степень $a^{\frac{1}{n}}$ как $\sqrt[n]{a}$.

IV. Тест.

В заданиях 1 – 10 выберите один вариант ответа.

1. Какое из следующих выражений равно 5^{k-4}?

1) $\frac{5^k}{5^{-4}}$; 2) $(5^k)^{-4}$; 3) $5^k - 5^4$; 4) $\frac{5^k}{5^4}$.

2. Вычислите $\sqrt[3]{0,027}$

1) 0,03; 2) 0,009; 3) 0,3; 4) 0,003.

3. Запишите в виде степени $\sqrt[5]{x^{-9}}$

1) $x^{-\frac{5}{9}}$; 2) $x^{-\frac{9}{5}}$; 3) $-x^{\frac{5}{9}}$; 4) - $x^{\frac{9}{5}}$.

4. Запишите в виде корня $(2a)^{\frac{4}{5}}$

1) $\sqrt[5]{2a^4}$; 2) $\sqrt[5]{16a^4}$; 3) $\sqrt[4]{32a^5}$; 4) $\sqrt[4]{2a^5}$.

5. Вычислите $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$

1) $-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{3}{2}$.

6. Возведите в степень $(y^3)^{\frac{1}{2}}$

1) $y^{3\frac{1}{2}}$; 2) $y^{\frac{3}{2}}$; 3) $y^{\frac{3}{6}}$; 4) $y^{\frac{1}{6}}$.

7. Вычислите $5^{0,6} \cdot 25^{0,2}$

1) $5^{0,12}$; 2) 5; 3) $125^{0,8}$; 4) $5^{0,8}$.

8. Вычислите $16^{-\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{3}}$

1) 4; 2) $4^{-\frac{5}{3}}$; 3) $4^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{1}{4}$.

9. Упростите выражение $m^{1,6} \cdot \sqrt[5]{m^{-3}} : m^2$

1) $m^{-3,9}$; 2) $m^{0,2}$; 3) m; 4) m^{-1}.

10. Решите уравнение $\sqrt{-2x+1} = 9$

1) - 1; 2) – 40; 3) 40; 4) нет корней

Дополнительное задание

1) Вычислите $(5^{2+\sqrt{3}})^{\sqrt{3}-2} + 3^{1-3\sqrt{7}} \cdot 27^{\sqrt{7}}$

2) Сколько целых чисел на координатной прямой между числами a = $-33^{\frac{1}{5}}$ *и b =* $\sqrt[3]{7}$*? Запишите их.*

Ответы: 1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 2; 5) 3; 6) 2; 7) 2; 8) 4; 9) 4; 10) 3.

Ответы на дополнительное задание:

1) 3,2

2) -2, -1, 0, 1.

Контрольная работа по теме"Степень с рациональным показателем»"

Часть 1

Вариант 1.

1. Вычислите: $а)81^{0,75}; б)32^{-0,4}; в)8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}; г)256^{0,5}$; $д)\sqrt[5]{32\cdot 0,00001}$; $е)\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$;

2. Упростите: а) $a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{2}}$, б) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-1}}{b^{\frac{3}{2}}}$.

3. Решите уравнение: а) $x^4 = 80$; б) $x^6 = -18$; в) $2x^3 - 128 = 0$; г) $x^5 + 32 = 0$.

Часть 2

1.Сократите дробь:

а) $\dfrac{x + 7x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 7}$; б) $\dfrac{a^{1,5}b - ab^{1,5}}{ab^{0,5} - a^{0,5}b}$; в) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}} - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{5}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}$;

2. При каких значениях переменной имеет смысл выражение: а) $\sqrt[10]{y-3}$; б) $\sqrt[9]{x+5}$; в) $\sqrt[6]{a(a-8)}$; г) $\sqrt[8]{b^2 + b - 12}$?

Вариант 2.

1. Вычислите: $а)16^{-0,75}; б)25^{-0,5}; в)64^{-\frac{4}{3}}\cdot 16; г)100^{-0,5}$; $д)\sqrt[4]{16\cdot 0,0001}$; $е)\dfrac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$;

2. Упростите: а) $b^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$, б) $\dfrac{a^2\cdot a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}$.

3. Решите уравнение: а) $x^4 = 20$; б) $x^8 = -36$; в) $64x^3 = 1$; г) $x^3 + 8 = 0$.

Часть 2

1.Сократите дробь:

а) $\dfrac{a + 6a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + 6}$; б) $\dfrac{x^{1,5}y + xy^{1,5}}{xy^{0,5} + x^{0,5}y}$; в) $\dfrac{y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{5}{6}}}{y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{5}{6}}}$;

2. При каких значениях переменной имеет смысл выражение: а) $\sqrt[8]{x+8}$; б) $\sqrt[7]{y-2}$; в) $\sqrt[4]{b(b-3)}$; г) $\sqrt[6]{a^2 - a - 30}$?

Вариант 1

1.Вычислите: 1) $4 \cdot 25^{\frac{1}{2}}$; 2) $81^{\frac{-1}{4}}$.

2.Упростите выражение: 1) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-1}{5}}$; 2) $\frac{a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}}$; 3) $(c^{\frac{5}{7}})^7 \cdot c^{\frac{-5}{2}}$.

3.Представьте выражение $\sqrt[5]{x} \cdot x^{\frac{4}{5}}$ в виде степени с основанием *x*.

4.Сократите дробь: 1) $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{b-3b^{\frac{1}{2}}}{3-b^{\frac{1}{2}}}$.

5.Упростите выражение: $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \left(y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

6.Упростите выражение: $\frac{\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-1}}$.

Вариант 2

1.Вычислите: 1) −¿ $5 \cdot 16^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{\frac{-1}{3}}$.

2.Упростите выражение: 1) $y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{-1}{4}}$; 2) $\frac{x^{\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{5}{7}}}$; 3) $(a^{\frac{3}{8}})^4 \cdot a^{\frac{-5}{2}}$.

3.Представьте выражение $\sqrt[6]{x} \cdot x^{\frac{5}{6}}$ в виде степени с основанием *x*.

4.Сократите дробь: 1) $\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\frac{4a^{\frac{1}{2}}-a}{a^{\frac{1}{2}}-4}$.

5.Упростите выражение: $\sqrt{a} - \left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

Вариант 3

1.Вычислите: 1) $6\cdot\ 49^{\frac{1}{2}}$; 2) $32^{\frac{-1}{5}}$.

2.Упростите выражение: 1) $c^{\frac{1}{4}}\cdot c^{\frac{-1}{3}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{5}}}$; 3) $(\ x^{\frac{5}{9}}\ )^{9}\cdot\ x^{\frac{-7}{2}}$.

3.Представьте выражение $\sqrt[8]{x}\ \cdot\ x^{\frac{7}{8}}$ в виде степени с основанием *x*.

4.Сократите дробь: 1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{m-7m^{\frac{1}{2}}}{7-m^{\frac{1}{2}}}$.

5.Упростите выражение: $\sqrt{y}-\left(y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}\right)^{2}$.

6.Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{(4\sqrt{3}-7)^{2}}+\sqrt{(4\sqrt{3}-6)^{2}}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}}$.

Вариант 4

1.Вычислите: 1) −¿ $7\cdot\ 36^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{-1}{3}}$.

2.Упростите выражение: 1) $d^{\frac{2}{5}}\cdot d^{\frac{-1}{6}}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{5}{8}}}$; 3) $(\ b^{\frac{3}{5}}\ )^{5}\cdot\ b^{\frac{-3}{2}}$.

3.Представьте выражение $\sqrt[4]{x}\ \cdot\ x^{\frac{7}{4}}$ в виде степени с основанием *x*.

4.Сократите дробь: 1) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}{p-q}$; 2) $\dfrac{5n^{\frac{1}{2}}-n}{n^{\frac{1}{2}}-5}$.

5.Упростите выражение: $\left(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}\right)^{2}-\sqrt{n}$.

Вариант 5

1.Вычислите: 1) $-¿$ $6\cdot$ $32^{\frac{1}{5}}$; 2) $16^{\frac{-1}{4}}$.

2.Упростите выражение: 1) $a^{\frac{4}{5}}\cdot a^{\frac{-1}{4}}$; 2) $\dfrac{y^{\frac{3}{7}}\cdot y^{\frac{4}{7}}}{y^{\frac{5}{9}}}$; 3) ($x^{\frac{3}{5}}$)$^5\cdot$ $x^{\frac{-5}{2}}$.

3.Представьте выражение $\sqrt[8]{x}$ $\cdot$ $x^{\frac{7}{8}}$ в виде степени с основанием x.

4.Сократите дробь: 1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\dfrac{a-8a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-8}$.

5.Упростите выражение: $\sqrt{a}$ $+$ $\left(a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

6.Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{\left(8-6\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(7-6\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{2+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-2}}$.

Вариант 6

1.Вычислите: 1) $-¿$ $2\cdot$ $100^{\frac{1}{2}}$; 2) $64^{\frac{-1}{3}}$.

2.Упростите выражение: 1) $y^{\frac{2}{7}}\cdot y^{\frac{-1}{6}}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{4}{9}}\cdot x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{5}{9}}}$; 3) ($a^{\frac{7}{8}}$)$^4\cdot$ $a^{\frac{-7}{2}}$.

3.Представьте выражение $\sqrt[4]{x}$ $\cdot$ $x^{\frac{3}{4}}$ в виде степени с основанием x.

4.Сократите дробь: 1) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{6c^{\frac{1}{2}}-c}{c^{\frac{1}{2}}-6}$.

5.Упростите выражение: $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2-\sqrt{b}$.