МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ГИМНАЗИЯ «УЧЕБНО - ВОСПИТАТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС № 1»

ТРЕУГОЛЬНИК РЁЛО - КРУГЛЫЙ КВАДРАТ ИЛИ КВАДРАТНЫЙ КРУГ?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ ПО МАТЕМАТИКЕ

Выполнила: ученица 8 «А» класса
МБОУ гимназии «УВК №1»
Клюшникова Анна Дмитриевна

Научный руководитель:
учитель математики
МБОУ гимназии «УВК №1»
Мишина Дарья Геннадиевна

Воронеж – 2024

Содержание

Введение

Треугольник Рёло – геометрическая фигура, которая привлекала и привлекает по сей день внимание многих исследователей. Наши предки использовали колесо, круглые брёвна одинакового диаметра для перемещения огромных камней, плит, массивных скульптур, на которые ставили плоскую платформу с грузом. Такой способ возможен потому, что круг – фигура постоянной ширины. Но круг не единственная фигура постоянной ширины. Более того, таких фигур бесконечно много. Это могут быть симметричные фигуры, построенные на основе правильных многоугольников, так и несимметричные фигуры, одна из них – треугольник Рёло.

Изучение треугольника Рёло помогает развивать абстрактное мышление и логику, понять и применить геометрические принципы и законы. Например, при анализе данной фигуры мы сталкиваемся с таким понятием, как радиус-вектор. Исследование треугольника Рёло обусловлено необходимостью понять его структуру и особенности, что, в свою очередь, позволяет более глубоко постигать и использовать геометрию.

Одной из целей изучения треугольника Рёло является знакомство с его основными свойствами. Расчет площади, вычисление углов, определение координат точек – все эти задачи возникают при изучении данной темы. Стоит разобраться в данных вопросах и научиться применять полученные знания для решения задач разного уровня сложности.

Важность изучения треугольника Рёло заключается в его применимости в реальной жизни. Например, знание его свойств может быть полезно при работе с техническими чертежами, при решении задач в физике и инженерии. Поэтому, изучение треугольника Рёло не только расширяет кругозор, но и помогает лучше понять и применить геометрию в практической деятельности.

Это и обуславливает **актуальность** рассматриваемой темы.

Треугольник Рёло позволяет сократить затраты при производстве, к примеру, при конструировании деталей. Так же в связи с разнообразными заданиями практического характера в экзаменационных работах школьникам важно знакомиться с фигурами постоянной ширины.

Цель исследовательской работы: исследовать свойства треугольника Рёло на практике, выявить практически значимые задачи, связанные с ним.

Объектом исследования является треугольник Рёло.

Предмет исследования – экспериментальный поиск геометрических и физических параметров данной фигуры.

Задачи:

1. Анализ учебной литературы.
2. Изучить свойства треугольника Рёло.
3. Придумать идею экспериментального доказательства принадлежности круга и треугольника Рёло к фигурам равной ширины; реализовать идею.
4. Провести экспериментальное исследование движения тел, перемещаемых с помощью фигур равной ширины.
5. Рассмотреть области применения фигур постоянной ширины.

Гипотеза: используя свойства треугольника Рёло, можно сделать его модель своими руками, показать практическое применение круглого треугольника.

1. Основные свойства фигур равной ширины

1.1 Историческая справка

Треугольник Рёло — это область пересечения трех окружностей, построенных из вершин правильного треугольника. Они имеют радиус, равный стороне этого же треугольника. Он относится к разряду простых фигур, обладающих постоянной шириной, то есть если к нему провести две параллельные опорные прямые, то независимо от выбранного направления, расстояние между ними будет неизменным, в любой точке независимо от их длины.

Название это необычной фигуре дал Франц Рёло (нем. Franz Reuleaux) – немецкий ученый в области механики и машиностроения, лектор Берлинской королевской технической академии, ставший впоследствии её президентом. Историки утверждают, что именно он стал первым, кто обнаружил свойства этой фигуры.

Рис. 1 Немецкий ученый механик Франц Рёло

Но Рёло был не первым, кто обнаружил эту фигуру. Некоторые математики считают, что первым продемонстрировал идею треугольника из равных дуг окружности в XVIII веке Леонард Эйлер (нем. Leonhard Euler) - швейцарский, прусский и российский математик и механик.

Рис. 2 Математик и механик Леонард Эйлер

Тем не менее подобная фигура встречается и раньше, в XV веке: её использовал в своих рукописях Леонардо да Винчи (итал. Leonardo di ser Piero da Vinci) — итальянский художник (живописец, скульптор, архитектор) и учёный (анатом, естествоиспытатель), изобретатель, писатель, музыкант.

Рис. 3 Итальянский изобретатель Леонардо да Винчи

Треугольник Рёло есть в его манускриптах, хранящихся в Институте Франции, а также в Мадридском кодексе.

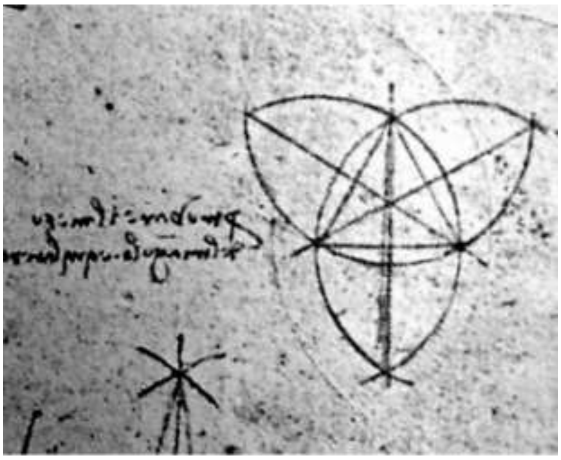

Рис. 4 Манускрипт А, фрагмент листа 15v

Примерно в 1514 году Леонардо да Винчи создал одну из первых в своём роде карт мира. Поверхность земного шара на ней была разделена экватором и двумя меридианами (угол между плоскостями этих меридианов равен 90°) на восемь сферических треугольников, которые были показаны на плоскости карты треугольниками Рёло, собранными по четыре вокруг полюсов.

Рис. 5 Mappa mundi (с лат. — «карта мира»)

1.2 Свойства треугольника Рело

Треугольник Рёло можно построить с помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой выбирается произвольно, центром второй может быть любая точка первой окружности, а центром третьей - любая из двух точек пересечения первых двух окружностей.

Среди всех фигур постоянной ширины у треугольника Рёло наименьшая площадь. Это утверждение носит название теоремы Бляшке — Лебега (по фамилиям немецкого геометра Вильгельма Бляшке, опубликовавшего теорему в 1915 году, и французского математика Анри Лебега, который сформулировал её в 1914 году). В разное время варианты её доказательства предлагали Мацусабуро Фудзивара (1927 и 1931 год), Антон Майер (1935 год), Гарольд Эгглстон (1952 год), Абрам Безикович (1963 год), Дональд Чакериан (1966 год), Эванс Харрелл (2002 год) и другие математики.

Любая фигура постоянной ширины вписана в квадрат со стороной, равной ширине фигуры, причём направление сторон квадрата может быть выбрано произвольно. Треугольник Рёло — не исключение, он вписан в квадрат и может вращаться в нём, постоянно касаясь всех четырёх сторон.

Каждая вершина треугольника при его вращении «проходит» почти весь периметр квадрата, отклоняясь от этой траектории лишь в углах — там вершина описывает дугу эллипса.

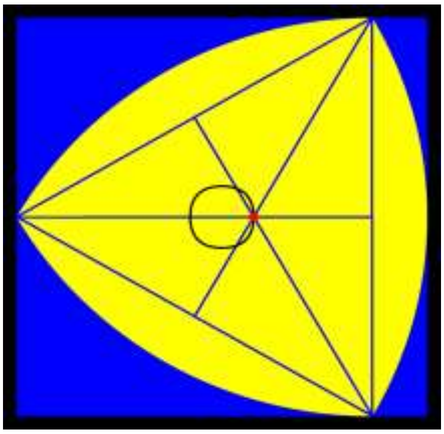

Рис. 6 Качение треугольника Рёло по квадрату

1.3 Экспериментальное доказательство принадлежности круга и треугольника Рёло к фигурам равной ширины

На первый взгляд может показаться, что фигура, имеющая наибольшую площадь – круг – должна иметь и наибольший периметр, а наименьший периметр должен быть у треугольника Рёло. Однако, это предположение ложно.

В 1860 году французский математик Барбье доказал следующую теорему: длина любой кривой постоянной ширины α равна α. Существует несколько доказательств теоремы Барбье: 1) основанное на методах выпуклой геометрии; 2) основанное на теории вероятности. Эти доказательства достаточно сложны, поэтому было решено проверить и доказать данные теоремы практически.

Доказательство I (практическое):

Возьмем фигуры равной ширины (круг и треугольник Рёло), изготовленные из картона и нерастяжимую тесьму. Обернём каждую из фигур по периметру тесьмой и измерим её длину в каждом случае (рис. 7). Длина тесьмы при измерении периметра обеих фигур одинакова и равна 31,4 ± 0,1 см. Полученное численное значение периметра круга и круглого треугольника в пределах погрешности измерений удовлетворяет значению периметра этих фигур, рассчитанному по формуле **P=πa**.

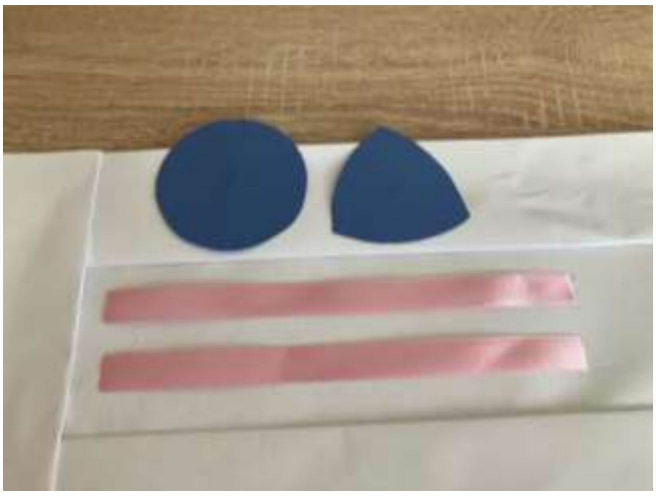

Рис. 7 Модель доказательства равенства периметров круга и треугольника Рёло

Доказательство II (теоретическое):

Вычислим периметр круга и треугольника Рёло, имеющих ширину a при помощи формул. Периметр круга равен длине ограничивающей его окружности (рис. 8):

$$P\ круга = l = 2\pi r = 2\pi = \frac{a}{2} = \pi a$$

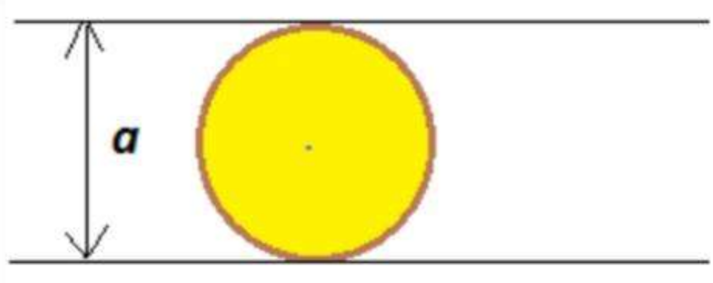

Рис. 8 К расчету периметра круга

Периметр треугольника Рёло равен сумме длин трёх дуг. Длину одной дуги найдем из следующих соображений: длина дуги меньше длины окружности во столько же раз во сколько центральный угол сектора, содержащего эту дугу, меньше 360º (рисунок 9).

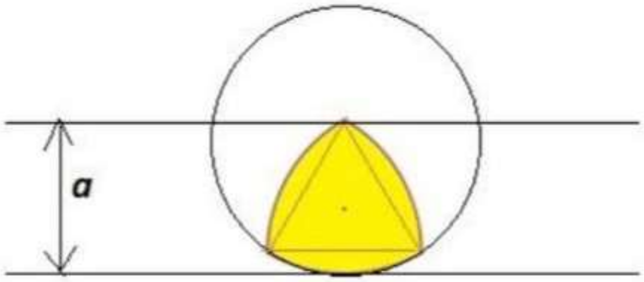

Рис.9 Расчет периметра треугольника Рёло

Длина окружности радиусом α равна

$$l1 = 2\pi a$$

Так как угол$\varphi = 60°$, длина дуги в 6 раз меньше длины окружности l_1

$$lдуги = l_1 \frac{60°}{360°} = \frac{l1}{6} = \frac{2\pi\alpha}{6} = \frac{\pi\alpha}{3}$$

Периметр треугольника Рёло равен

$$P_{\text{Рёло}} = 3lдуги = \pi\alpha$$

Практические измерения и теоретические вычисления позволяют сделать вывод: периметры круга и треугольника Рёло одинаковы и равны $\pi\alpha$.

2. Исследование движения треугольника Рёло

2.1. Определение траектории движения при качении по горизонтальной плоскости

Выше экспериментально подтверждено, что периметры плоских фигур одинаковой ширины принимают одинаковые значения. Исходя из данного факта, можем предположить, что точки, находящиеся на контурах, ограничивающих круг и треугольник Рёло, при своем качении по горизонтальной плоскости, будут следовать похожим траекториям.

Мной была изготовлена машинка с колесами в форме треугольника Рёло для проведения эксперимента. Эксперимент проводился в двух случаях: 1 – колеса были соединены жесткой осью, модель представлена в виде машинки (рис. 8), 2 – колеса использовались как самостоятельная часть в качестве катков (рис. 9)

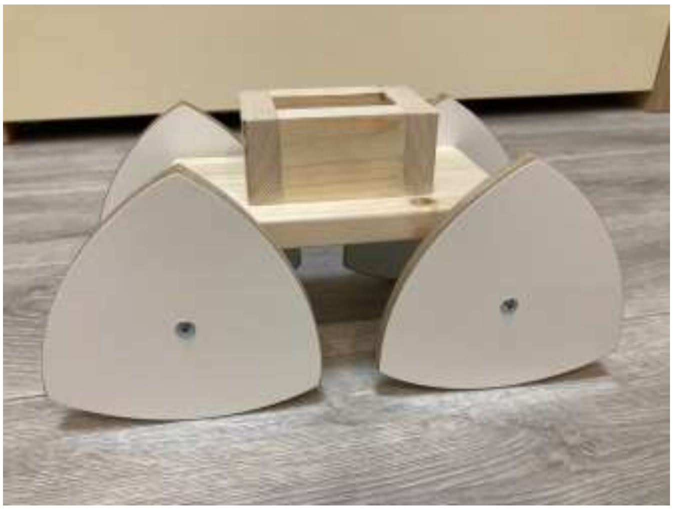

Рис. 8 Машинка с колесами в форме треугольника Рёло

Рис. 9 Колеса в форме треугольника Рёло, использующиеся в виде катков

В первом эксперименте движение осуществлять на таких колесах было возможно, но из-за жесткой оси, передвижение было некомфортным.

Данная проблема подвигла на проведение второго эксперимента, учитывая тот факт, что в прошлом наши предки умело использовали однородные круглые бревна для перевозки громадных камней и массивных скульптур, которые далее помещали на плоскую платформу с грузом, движение в этом случае должно быть комфортным. Они прибегали к такому методу благодаря особенностям круга – его равной ширины. Выше подтверждено, что категория фигур с одинаковой шириной включает в себя и треугольник Рёло, следовательно, этот тип фигуры также может быть использован для транспортировки объектов.

В качестве платформы использована плоская картина. При качении движение было комфортным, картина оставалась на одном уровне, а значит, перемещаемое тело движется прямолинейно (рис. 10)

Рис. 10 Экспериментальное исследование движения на колесах в форме треугольника Рёло, использующиеся в виде катков

Вывод: на мой взгляд угловатые колёса неизбежно должны создавать при качении тряску, но оказалось, что у них достаточно плавный ход, при условии того, что мы перекатываем колеса и у них нет оси. Поскольку сечение катков имеет форму равной ширины (форму треугольника Рёло), плоская платформа, которая опирается на эти катки, движется в прямолинейном направлении и остается параллельной плоскости, по которой происходит качение.

2.3 Задачи на нахождение параметров фигур равной ширины

Формулы для расчета площади и периметра фигур равной ширины могут быть применены для решения ряда практически значимых задач. Рассмотрим некоторые из них.

№1. Найдите площадь треугольника Рёло, если длина его стороны равна 10 см, 15 см, 13 см и 7 см.

Решение.

Используем формулу нахождения площади треугольника Рёло: $S = = \frac{1}{2}\alpha^2(\pi - \sqrt{3})$

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^2(3{,}14 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cdot 100(3{,}14 - 1{,}73) = \frac{1}{2} \cdot (314 - 173) = 70{,}5(\text{см}^2);$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 15^2(3{,}14 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cdot 825(3{,}14 - 1{,}73) = \frac{1}{2} \cdot (2590{,}5 - 1427{,}25) = 581{,}625(\text{см}^2);$

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 13^2(3{,}14 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cdot 169(3{,}14 - 1{,}73) = = \frac{1}{2} \cdot (530{,}66 - 292{,}37) = 119{,}145(\text{см}^2);$

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 7^2(3{,}14 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cdot 49(3{,}14 - 1{,}73) = = \frac{1}{2} \cdot (153{,}86 - 84{,}77) = 34{,}545(\text{см}^2).$

Ответ: 70,5 см^2; 581,625 см^2; 119,145 см^2; 34,545 см^2

№2. Найдите периметр треугольника Рёло, если длина его стороны равна 5 см, 14,5 см, 17,76 см и 26,3 см.

Решение:

$P_1 = \pi\alpha = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ (см);

$P_2 = \pi\alpha = 3{,}14 \cdot 14{,}5 = 45{,}53$ (см);

$P_3 = \pi\alpha = 3{,}14 \cdot 17{,}76 = 55{,}7664$ (см);

$P_4 = \pi\alpha = 3{,}14 \cdot 26{,}3 = 82{,}582$ (см).

Ответ: 15,7 см; 45,53 см; 55,7664 см; 82,582 см.

№3. В 2006 году в Кёльне была построена 103-метровая башня, сечение которой представляет собой треугольник Рёло. Один человек обходит башню

«Кёльнский треугольник», другой – круглую башню такой же ширины. Какому человеку удастся раньше обойти здание, если скорость их движения одинакова и равна 5 км/ч.

Решение.

Известно, что треугольник Рёло и круг – фигуры равной ширины и их периметры равны, очевидно, что для преодоления равного расстояния потребуется одинаковое время.

Ответ: оба человека обойдут здания за одно и тоже время.

2.3 Приложения треугольника Рёло

Треугольник Рёло из-за своей удивительной формы и свойств нашел свое приложение во многих отраслях науки, механики и искусства. Вот некоторые из них.

1) **Карта мира**

Можем предположить, что идеи Леонрадо да Винчи сподвигли многих географов на создание «идеальной карты мира».

Джозеф Станислос Кэхилл (1866-1944), картограф и архитектор, взяв резиновую модель земного шара «приплюснув» его оконным стеклом, тоже получил «карту», на которой 8 треугольников Рёло.

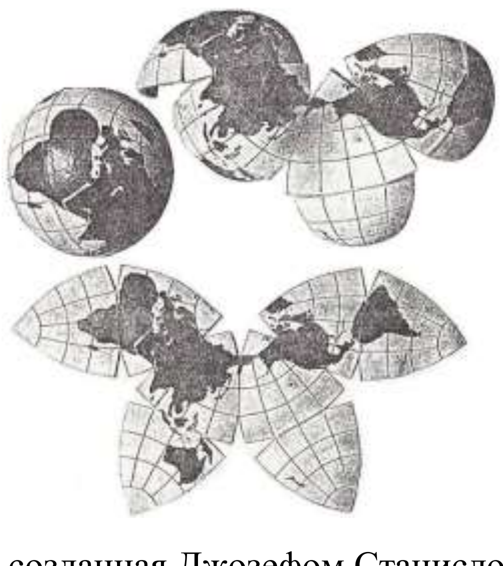

Рис. 11 Карта, созданная Джозефом Станислосом Кэхиллом

2) **Двигатель Ванкеля**

Также, свойства треугольника Рёло использовали немецкие инженеры Вальтер Фройде и Феликс Ванкель, когда разрабатывали роторно-поршневой двигатель, который имеет очень высокую удельную мощность и гораздо меньшие габариты по сравнению с другими двигателями.

Рис. 12 Роторно-поршневой двигатель

Такой двигатель используется на некоторых самолётах, но в основном в машинах японской фирмы Mazda. Ротор этого двигателя выполнен в виде треугольника Рёло.

3) **Грейферный механизм в кинопроекторах**

Грейферный механизм – это ещё одно применение треугольника Рёло в механике. Он осуществляющий покадровое перемещение плёнки в кинопроекторах. Двигатели дают равномерное вращение оси, а чтобы на экране было чёткое изображение, плёнку мимо объектива надо протянуть на один кадр, дать ей постоять, потом опять резко протянуть, и так 18 раз в секунду.

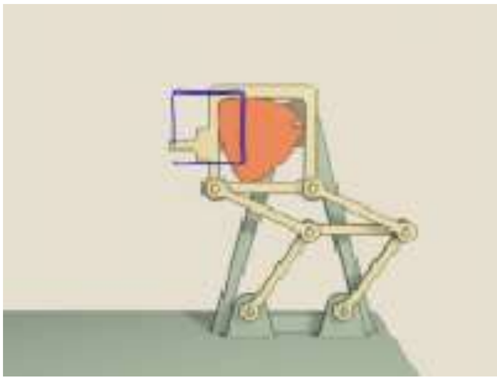

Рис. 13 Строение грейферного механизма

Грейферный механизм основан на треугольнике Рёло, вписанном в квадрат, и двойном параллелограмме, который не даёт квадрату наклоняться в стороны.

4) **Архитектура**

Треугольник Рело используют и в архитектуре, например, в 2006 году для широкой публики был открыт музей компании Mercedes-Benz в Штутгарте. Здание основано на уникальной концепции в форме треугольника Рёло.

Рис. 14 Музей компании Mercedes-Benz в Штутгарте

Построенная в 2006 году в Кельне 103–метровая башня под названием «Кельнский треугольник». В сечении имеет именно форма этой фигуры.

Рис. 17 Башня «Кельнский треугольник»

Окна в форме треугольника Рёло можно обнаружить в церкви Богоматери в Брюгге (рис. 18), а также в шотландской церкви в Аделаиде (рис. 19).

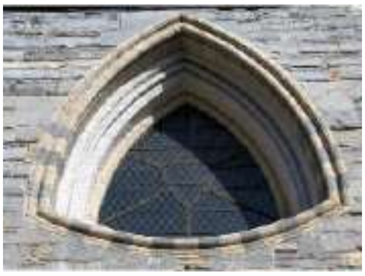

Рис. 18 Окно в церкви Богоматери в Брюге

Рис. 19 Окно в шотландской церкви в Аделаиде

Форму треугольника Рёло имеют сувенирные монеты Бермуд (рис. 20) и памятная монета Канады (рис. 21).

Рис. 21 Сувенирные монеты Бермуд

Рис. 22 Памятная монета Канады

6) Крышки для люков

В форме треугольника Рёло можно изготавливать крышки для люков - опытным путем доказано, что благодаря постоянной ширине они не могут провалиться в люк.

В Сан-Франциско, для системы рекуперирования воды корпуса люков имеют форму треугольника Рёло. За счет того, что у него площадь меньше, чем у круга, себестоимость люков в форме треугольников Рёло была бы ниже, чем у традиционно круглых.

Рис. 23 Крышки люков в Сан-Франциско

Заключение

Изобретенный в прошлом веке треугольник Рёло широко используется и изучение его удивительных свойств не стоит на месте. Его свойства как характеристики фигуры постоянной ширины находятся в постоянном теоретическом и практическом изучении. И это правильно, ведь чем лучше будут изучены свойства треугольника Рело и остальных фигур постоянной ширины, тем больше возможностей будет открываться для их использования в нашей жизни.

Проведенные исследования, убеждают в том, что открытие треугольника Рёло сделало переворот в научно-техническом мире, так как его отличительные свойства находят множество применений.

В ходе выполнения этой работы были изучены свойства треугольника Рёло, затронута история открытия, рассмотрены области применения.

Выполненные практические эксперименты позволяют убедиться в том, что средство передвижения с колесами в форме треугольника Рёло (машинка и колеса-катки) создать реально, движение осуществлять на таких колесах также возможно.

В процессе проведения исследования получены следующие новые результаты:

1) экспериментально доказана принадлежность круга и треугольника Рёло к фигурам равной ширины;

2) найдены периметры фигур равной ширины и доказано, что круг и треугольник Рёло имеют одинаковый периметр;

3) установлена траектория движения колес равной ширины при качении по горизонтальной плоскости;

4) придумана идея и проведено экспериментальное исследование движения тел, перемещаемых с помощью фигур равной ширины.

Выведенные формулы для расчета площади и периметра фигур равной ширины могут быть применены для решения ряда практически значимых задач. В перспективе развития исследовательской работы планируется разработка практически значимых задач на нахождение параметров фигур равной ширины.

На наш взгляд, изучение треугольника Рёло является важным и актуальным как с практической, так и с теоретической точек зрения. Данная работа помогает развивать математические навыки, абстрактное мышление и логику, а также находит применение в реальной жизни.

Список литературы

1. Крутова О. В. Исследование свойств геометрических фигур равной ширины [Текст] / О.В. Крутова, С.В. Лебедева // Летние каникулы: материалы III Международной научно-практической конференции школьников (Чебоксары, 31 авг. 2016 г.). – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – с. 51-57.
2. Математическая составляющая / Редакторы-составители Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. – М.: Фонд «Математические этюды», 2015. –151 с.
3. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры: опыты математического мышления. - 1962. - 264 с.
4. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Фигуры постоянной ширины // Выпуклые фигуры. –М. –Л.:ГТТИ, 1951. – 343 с.