Авторский курс:

«МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ВОПРОСОВ, СВЯЗАННЫХ С МОДУЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА, В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ»

Учитель: Юракова Ольга Александровна

Оглавление

Глава 1Анализ изучения темы «Модуль числа» в школьном курсе математики 7

1.1 Анализ темы «Модуль числа» в школьных учебниках «Математика» под редакцией А. Г. Мордкович 7

Глава 2 Разработка содержания и методики изучения темы: «Модуль» на факультативном курсе 15

2. 1 Методические рекомендации по проведению факультативного курса «Модуль»..... 15

2. 2 Содержание факультативного курса занятий по теме: «Модуль».....16

2. 3 Тематическое планирование.....18

2. 4 Материал к занятиям 19

2. 4. 1 Занятие 1. Общие сведенья о модуле. Определение, геометрический смысл, свойства модуля. Применение определения модуля при решении уравнений.....19

2. 4. 2 Занятие 2. Метод интервалов для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль 24

2. 4. 3 Занятие 3. Решение неравенств с модулем посредством равносильных переходов 30

2. 4. 4 Занятие 4. Решением уравнений и неравенств с модулями на координатной прямой…. 36

2. 4. 5 Занятие 5. Модуль и иррациональные уравнения.....40

2. 4. 6 Занятие 6. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком модуля…… 45

2. 4. 7 Занятие 7–8. Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$……..……..50

2. 4. 8 Занятие 9–10. Построение графиков функции вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$, и графиков неявно заданных функций 61

2. 4. 9 Занятие 11. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом.....69

2. 4. 10 Занятие 12. Решение уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих модуль, графическим способом.....78

2. 4. 11 Занятие 13. Урок контроля знаний, умений и навыков учащихся по изученному курсу «Модуль» 86

2. 4. 12 Занятие 14. Модуль в заданиях единого государственного экзамена.....87

Заключение 95

Список литературы 97
Приложение А Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 1. Общие сведенья о модуле. Определение, геометрический смысл, свойства модуля. Применение определения модуля при решении уравнений 99
Приложение Б Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 2. Метод интервалов для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль 100
Приложение В Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 3. Решение неравенств с модулем посредством равносильных переходов 103
Приложение Г Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 4. Решением уравнений и неравенств с модулями на координатной прямой 105
Приложение Д Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 5. Модуль и иррациональные уравнения 108
Приложение Е Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 6. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком модуля 110
Приложение Ж Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 7–8. Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$ 113
Приложение И Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 9–10. Построение графиков функции вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$, и графиков неявно заданных функций 114
Приложение К Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 11. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом 115
Приложение Л Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 12. Решение уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих модуль, графическим способом 117
Приложение М Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 13. Урок контроля знаний, умений и навыков учащихся по изученному курсу «Модуль числа» 120
Приложение Н Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 14. Модуль в заданиях Единого Государственного Экзамена 127

Введение

Одной из важнейших характеристик числа является понятие абсолютной величины, то есть модуля. Данное понятие применяется не только в курсе математики, но и в физике, технических науках, изучаемых в высших учебных заведениях.

Теория и практика методики обучения математике показывают, что ученику не хватает знаний по математике при решении задач повышенной сложности. Требуется умение видеть и понимать логическую структуру изучаемого материала, его место в общей системе математических фактов. Но для этого нужно найти инструмент, позволяющий выработать у учеников современный системный тип мышления. Данным инструментом, в нашем случае, являются задачи. ([10])

Решение задач с модулем не является целью, а только средством для получения развития системного мышления, повышения математической культуры, а также выявления математических способностей, становления интереса к данному предмету, ориентации выбора профиля, связанного с математикой для дальнейшего обучения.

Знания, умения и навыки, полученные в ходе решения уравнений и неравенств, а также в построении графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля, необходимы учащимся не только для успешной подготовки и сдачи единого государственного экзамена, но и для хорошей подготовки к школьным олимпиадам.

Актуальность данного исследования заключается в несоответствие уровня трудности задач с модулем, изучаемых в школьном курсе математики, и уровнем трудности задач, предлагаемых единым государственным экзаменом, которые, вызывают у учащихся трудности при их решении ввиду слабой математической базы.

Объектом исследования является понятие «модуль» в школьном курсе математики.

Предметом исследования выступает методика обучения решению задач, связанных с модулем, в школьном курсе математики.

Целью исследования является создание содержательно–методической линии факультативного курса по решению задач с модулем для учащихся 10-11 классов.

Гипотеза исследования состоит в том, что факультативный курс «Модуль», позволяет решать широкий круг заданий, связанных с понятием модуль, которые направлены на развитие учащихся и могут способствовать более эффективному процессу обучения математике.

Цель и гипотеза исследования обусловили следующие **задачи**:

1 Выявить на основе анализа методической и специальной литературы особенностей изучения материала, связанного с модулем.

2 Проанализировать учебники «Математика» под редакцией А. Г. Мордковича по теме исследования.

3 Разработать содержание и методику факультативного курса «Модуль» для учащихся 10-11 класса.

4 Разработать методические рекомендации обучения учащихся решению задач связанных с модулем.

Методами исследования являлись:

1 Анализ психолого–педагогической литературы по теме исследования.

2 Обобщение опыта работы учителей по формированию умения решать задачи, содержащие модуль.

3 Анализ методической, специальной математической литературы по теме исследования.

Структура работы состоит из: введения, двух глав, заключения, списка литературы (15 наименований), приложения.

Во введении раскрывается актуальность выбранной темы, формулируются проблема, цель, гипотеза исследования и задачи, которые необходимо решить для достижения поставленной цели.

В 1 главе описывается анализ материала по теме «Модуль числа» согласно учебникам «Математика» под редакцией А. Г. Мордковича, приводится анализ

психолого–педагогических особенностей обучения математике в подростковом возрасте.

В главе 2 предлагается содержание факультативного курса «Модуль» и методические рекомендации по его проведению. Данный курс рассчитан на 14 занятий, ориентирован на учащихся 10–11 классов. В ходе разработки курса были подобраны различные задания, в том числе задачи из профильного уровня ЕГЭ. Все задачи приведены с решением.

В заключении работы сделаны основные выводы по результатам, которые были получены в процессе исследования.

Глава 1Анализ изучения темы «Модуль числа» в школьном курсе математики

1.1 Анализ темы «Модуль числа» в школьных учебниках «Математика» под редакцией А. Г. Мордкович

Впервые понятие модуль числа, а также его обозначение, встречается в учебнике А.Г. Мордкович «Математика. 6 класс», в §3. «Модуль числа. Противоположные числа». Это понятие вводится при помощи числовой прямой и трактуется следующим образом:

«Расстояние от точки $\mathcal{A}(a)$ до начала отсчета, т.е. до точки $\mathcal{O}(0)$, называют модулем числа (a) и обозначают $|a|$».

При этом оговаривается, что «$|0| = 0$».

Далее приводятся примеры и правильное произношение данного понятия:

«Например, $|-4| = 4, |6| = 6$ (читается: «модуль минус четырех равен четырём», «модуль шести равен шести»).»

После этого приводится система упражнений на закрепление данного понятия. Например, такие упражнения, как:

– нахождение модуля от данного числа ([5], №62, №63);

– из данных чисел выбрать то, которое имеет наибольший модуль ([5], №64).

В учебнике приводятся упражнения и на сравнение чисел под знаком модуля и без ([5], №85,№86). В упражнениях ([5], №91, №92, №105, №106) необходимо вычислить арифметическое выражение, в котором два или же оба члена под знаком модуля, или всё оно ([5], №91, №92, №105, №106).

В §5 « Параллельность прямых» приводится ряд упражнений, связанных с понятием модуль. Здесь встречаются упражнения на:

– сравнение двух чисел под знаком модуля, где одно из них не под знаком модуля (№152),

– выполнение арифметических действий с модулями ([5], №154, №155, №163, №166, №167).

Далее, в §9 «Расстояние между точками координатной прямой», вновь встречаются понятие модуль. Здесь приводится система упражнений, которая поможет ввести новое понятие при помощи модуля:

– сравнение двух чисел ([5], №289, №290) с модулем, где одно из них не под знаком модуля, и ([5], №293) двух выражений;

– ([5], №292) приводится упражнение на использование знака модуля, в текстовой форме:

Используя знак модуля, запишите:

а) модуль суммы чисел a и b;

б) сумму модулей чисел a и b;

в) модуль разности чисел a и b;

г) разность модулей чисел a и b;

Далее приводится упражнение ([5], №294) на сравнение $|a-b|$ и $|b-a|$, при различных значениях. После этого делается вывод: «Значения выражений $|a-b|$ и $|b-a|$ равны при любых значениях a и b.».

В учебнике А.Г. Мордкович «Математика. 6 класс» §9 «Расстояние между точками координатной прямой» впервые вводится понятие «расстояние между двумя точками», а также его прочтение, которое записывается в символьной форме, при помощи модуля:

«Расстояние между точками a и b равно модулю разности координат этих точек: $|a-b|$.

Обычно вместо $A(a)$ и $B(b)$ пишут просто a и b, а расстояние между точками a и b обозначают $\rho(a, b)$, (ρ – «ро», буква греческого алфавита). Запись $\rho(a, b)$ читается: «ро от a, b». Таким образом, $\rho(a, b)=|a-b|$» ([5]).

После на данное определение приводится система упражнений:

− найти расстояние между двумя точками ([5], №296);

− найти координату середины двух данных точек ([5], №297).

В учебнике А. Г. Мордкович «Алгебра. 7 класс» вновь встречается понятие модуль в §5 «Координатная прямая». В данном параграфе вновь даётся понятие

расстояние между двумя точками, а также прочтение данного понятия, которое записывается в символьной форме, при помощи модуля. Оно аналогично тому, что приводится в учебнике «Математика. 6 класс» в §9 «Расстояние между точками координатной прямой».

В учебнике Мордкович «Алгебра. 8 класс» вновь встречается понятие модуль в §16 «Модуль действительного числа. Функция $y = |x|$». В пункте 1 §16 «Модуль действительного числа и его свойства» приводится определение модуля действительного числа и его свойства:

«Определение. Модулем неотрицательного действительного числа x называют само это число: $|x| = x$; модулем действительного числа x называют противоположное число: $|x| = -x$.

Например, $|5| = 5$; $|-5| = -(-5)$;

$\left|\sqrt{5}-2\right| = \sqrt{5}-2$ (так как $\sqrt{5}-2 > 0$);

$\left|\sqrt{5}-3\right| = -(\sqrt{5}-3) = -\sqrt{5}+3$ (так как $\sqrt{5}-3 < 0$);

Свойства модуля:

1 $|a| \geq 0$.

2 $|ab| = |a||b|$.

3 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

4 $|a|^2 = a^2$.

5 $|a| = |-a|$.

6 $|a| \geq a$.

7 $|a+b| \leq |a| + |b|$.» ([7])

Последние два свойства приводятся с доказательством.

В пункте 2 «Геометрический смысл модуля действительного числа» этого же параграфа вновь встречается понятие расстояние между двумя точками, но уже для действительных чисел, охватывающие три случая:

«Вернемся к множеству $\mathbb{R}$ действительных чисел и его геометрической модели – числовой прямой. Отметим на прямой две точки a и b (ρ – «ро», буква

греческого алфавита). Это расстояние равно $\mathcal{b} - \mathcal{a}$, если $\mathcal{b} > \mathcal{a}$ (рисунок 1, а), оно равно $\mathcal{a} - \mathcal{b}$, если $\mathcal{a} > \mathcal{b}$, (рисунок 1, б), наконец, оно равно нулю, если $\mathcal{a} = \mathcal{b}$.

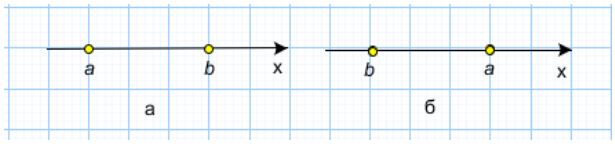

Рисунок 1

Все три случая охватываются одной формулой $\rho(\mathcal{a}, \mathcal{b}) = |\mathcal{a} - \mathcal{b}|$.». ([7])

Здесь впервые встречаются уравнения с модулем и неравенства. В примерах 1, 2, 3 приводятся уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, с подробным решением. Например:

«Пример 1. Решить уравнения:

а) $|x - 2| = 3$;

б) $|x + 3{,}2| = 2$;

в) $|x| = 2{,}7$;

г) $\left|x - \sqrt{2}\right| = 0$.

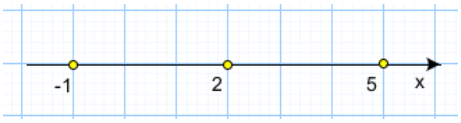

Рисунок 2

Решение:

а) переведём соотношение $|x - 2| = 3$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x, 2) = 3$, то есть удалены от точки 2 на расстояние, равное 3. Это − точки −1 и 5 (рисунок 2). Следовательно, уравнение имеет два корня: −1 и 5.»

А в примере 4 встречаются неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Здесь приводится подробное решение данного типа заданий. Например:

«Пример 4. Решить неравенства:

а) $|x - 2| < 3$.

Решение:

а) переведём соотношение $|x-2|<3$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x,2)<3$, то есть удалены от точки 2 на расстояние меньшее, чем 3. На расстояние, равное 3, удалены от точки 2 точки –1 и 5 (рисунок 2). Следовательно, решениями интересующего нас неравенства являются все числа из интервала $(1;5)$ (рисунок 2).»

В пункте 3 «Тождество $\sqrt{a^2}=|a|$» объясняется, как вычислять или же упрощать числовое или алгебраическое выражение. Производится сравнение $\sqrt{a^2}$ и $|a|$, выясняется, что они равны, то есть данное и данное тождество имеет место $\sqrt{a^2}$ = $|a|$ верно. При этом отмечается, что в роли а может выступать любое числовое или алгебраическое выражение, например:

$$\sqrt{(3x-4)^2}=|3x-4|,$$

$$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\left|2-\sqrt{7}\right|,$$

и так далее.

В тексте учебника приводятся примеры с подробным решением. Например:

«Пример 7. Упростить выражение

$$\sqrt{52-30\sqrt{3}}-\sqrt{43-24\sqrt{3}}.$$

Решение.

1) рассмотрим подкоренное выражение $52-30\sqrt{3}$. Имеем:

$$52-30\sqrt{3}=52-2\cdot5\cdot3\cdot\sqrt{3}.$$

Положим a = 5, b = $3\sqrt{3}$; тогда

$$a^2+b^2=5^2+(3\sqrt{3})^2=25+27=52.$$

Это значит, что рассматриваемое выражение можно представить в виде a^2+b^2-2ab, т. е. в виде$(a-b)^2$.

Итак,

$$52-30\sqrt{3}=25+27-2\cdot5\cdot3\sqrt{3}=5^2-2\cdot5\cdot3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2=(5-3\sqrt{3})^2.$$

Значит,

$$\sqrt{52-30\sqrt{3}}=\sqrt{(5-3\sqrt{3})^2}=\left|5-3\sqrt{3}\right|=3\sqrt{3}-5.$$

2) рассмотрим подкоренное выражение $43-24\sqrt{3}$. Имеем:

$$43-24\sqrt{3}=43-2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{3}.$$

Положим a = 4, b = $3\sqrt{3}$; тогда

$$a^2+b^2=4^2+(3\sqrt{3})^2=16+27=43.$$

Это значит, что рассматриваемое выражение можно представить в виде a^2+b^2-2ab, т. е. в виде$(a-b)^2$.

Итак,

$$43-24\sqrt{3}=16+27-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}=4^2-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2=(4-3\sqrt{3})^2.$$

Значит,

$$\sqrt{43-24\sqrt{3}}=\sqrt{(4-3\sqrt{3})^2}=\left|4-3\sqrt{3}\right|=3\sqrt{3}-4.$$

3) $(3\sqrt{3}-5)-(3\sqrt{3}-4)=-1$.» ([7]).

В пункте 4 «Функция $y=|x|$» этого же параграфа рассматривается график данной функции и устанавливаются её свойства.

Далее, в пункте 5 «Разные графики функций с модулями» приводятся примеры на закрепление свойств функций, содержащих знак модуля. В этих упражнениях рассматривается построение графиков.

В §23 «Как построить график функции $y=|f(x)|$ и $y=f(|x|)$, если известен график функции $y=f(x)$» приводится подробное описание построения данных функций и примеры с подробным решением.

В §37 «Уравнения с модулями» впервые встречаются уравнения с модулями. В данном параграфе приводятся примеры с подробным решением. Описаны несколько способов решения данных уравнений, первый – по определению модуля, второй – сведение к совокупности уравнений, третий – графический. Например, решить уравнение $x^2+2|x-1|-6=0$.

«Второй способ. Выше, в §16, уже говорилось о том, что при решении уравнений с модулями часто рассуждают так. Равенство $|c|=a$ при a < 0

неверно, при $a > 0$ эквивалентно совокупности двух равенств $c = a$, $c = -a$, при $a = 0$ сводится к $c = 0$ (впрочем, последний случай можно объединить со случаем $a > 0$). Поэтому если дано уравнение $|f(x)| = h(x)$, то при $h(x) < 0$ оно не имеет решений, а при $h(x) \geq 0$ надо рассмотреть два случая: $f(x) = h(x)$, $f(x) = -h(x)$ (совокупность уравнений).

Для заданного уравнения потребуем выполнения условия $\frac{5x-9}{3} \geq 0$ и рассмотрим совокупность уравнении:

$$x^2 - 6x + 7 = \frac{5x-9}{3};\ x^2 - 6x + 7 = -\frac{5x-9}{3}.$$

Оба эти уравнения решены выше (при первом способе решения заданного уравнения), их корни таковы: 6, $\frac{5}{3}$, 3, $\frac{4}{3}$. Условию $\frac{5x-9}{3} \geq 0$ из этих четырех значении удовлетворяют лишь два: 6 и 3.

Вывод: заданное уравнение имеет корни 6 и 3.» ([7]).

В учебнике Мордкович «Алгебра. 9 класс» вновь встречается понятие модуля в §1 «Линейные и квадратные неравенства» в примере 5, содержится неравенство с модулем, при этом приводится решение.

«Пример 5. Решить неравенство:

а) $|x - 2| < 3$;

б) $|x + 3{,}2| \leq 2$;

в) $|10x| > 27$.

Решение. Напомним геометрическое истолкование выражения $|x - a|$ – это расстояние на координатной (числовой) прямой между точками x и a, которое обозначают $\rho(x, a)$, (ρ – буква греческого алфавита «ро»):

$$|x - a| = \rho(x; a).$$

Пример,

$$|x - 2| = \rho(x; 2);\ |x + 3{,}2| = \rho(x; 3{,}2);\ |x| = \rho(x; 0).$$

а) неравенство $|x - 2| < 3$ можно истолковать так: нужно найти на координатной прямой все такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; a) < 3$, то есть е. удалены от точки 2 на расстояние, меньшее 3. Это все

точки, принадлежащие интервалу (–1; 5), и только они (рисунок 3). Интервал (–1; 5) – решение заданного неравенства.

Рисунок 3». ([8]).

Остальные задания решаются аналогично.

В §11 «Четные и нечетные функции», в примере 4 встречается функция $y = |x|$, на промежутке под а) $x \in [-2; 2]$, и на полуинтервале б) $x \in [-3; 3)$. Также приводиться подробное решение.

В учебнике Мордкович «Алгебра. 10–11 класс» вновь встречается модуль, в §42 «Преобразование выражений, содержащих радикалы» приводится обобщение используемой в курсе алгебры за 8 класс – $\sqrt{a^2} = |a|$, на случай любого чётного показателя корня $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Далее, в §57 «Решение неравенств с одной переменной», пункт 4 «Неравенства с модулями» вновь встречаются неравенства с модулями. Здесь приводится подробное решение данных уравнений.

Глава 2 Разработка содержания и методики изучения темы: «Модуль» на факультативном курсе

2. 1 Методические рекомендации по проведению факультативного курса «Модуль»

Факультативный курс «Модуль» может дать примерный объем знаний, умений и навыков, которыми должны владеть учащиеся. В данный объем входят такие знания, умения и навыки, которые предусмотрены требованиями программы общеобразовательной школы. ([5, 6, 7, 8, 9]) Теоретический материал закрепляется значительным количеством заданий, которых недостаточно в школьных учебниках по математике. Примеры, подобранные для занятий, могут научить учащихся решать задачи более высокой по сравнению с обязательным уровнем сложности, овладеть рядом интеллектуальных и технических умений, свободно ими использоваться. Требования к знаниям, умениям не должны быть завышены, так как чрезмерность требований порождает перегрузку и ведет к снижению интереса. Одна из целей изучения данного курса является – помощь в осознании учащимися степени интереса к математике, а также оценка своих возможностей в данном предмете, поэтому интерес и склонность учащихся на занятиях должны подкрепляться.

В методической литературе «модулю» уделяется немало внимания. Однако задания, связанные с модулем, вызывают у учащихся затруднения. ([1]) Одна из основных причин, по мнению методистов, заключается в непонимании учащимися определения модуля:

«Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само число, если оно неотрицательное, и число противоположное x, если x отрицательное:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$ » ([7]) (1)

При введении понятия модуля необходимо обратить внимание учащихся на то, что число x может быть как отрицательное, так и положительное. ([1])

Для того чтобы строить графики функций, содержащих знак модуля, необходимо понимание определения модуля, а также знание о построении графиков простейших функций.

В занятиях представлены примеры на актуализацию и систематизацию знаний, что способствует эффективному освоению курса. Для охватывания большей части учащихся на занятиях возможен фронтальный опрос. Это помогает учащимся развивать лаконичную и грамотную речь, учиться работать в быстром темпе.

При решении упражнений учащимися возможно комментирование хода его решения. В этом случае имеется процесс повторения, возможность опережения ошибок, так как комментирование сильным учащимся не мешает, а слабым помогает. ([1])

Проверка упражнений для самостоятельной работы возможна путём узнавания способа действия и называния ответа. Можно предложить учащимся самостоятельно, в группах или вместе с учителем выполнять данные упражнения. В занятиях имеются обязательные домашние задания.

Программа данного факультативного курса позволяет организовывать повторение и закрепление тем, связанных с модулем. Факультативный курс «Модуль» может быть использован в классах, имеющих различную степень подготовленности, способствует развитию мышления учащихся, познавательных интересов, предоставляет возможность подготовиться к сознательному выбору профиля обучения и дальнейшей специализации.

Занятия могут заинтересовать учащихся, вызвать интерес к математике, если они таковые не проявляются.

2. 2 Содержание факультативного курса занятий по теме: «Модуль»

Предлагаемый факультативный курс «Модуль» ориентирован и предназначен для реализации в 10–11 классах общеобразовательной школы, для расширения теоретических и практических знаний учащихся.

Предлагаемый курс включает в себя 14 занятий, каждое занятие рассчитано на 45–60 минут. Предложена программа с примерным распределением учебного времени, которая включает в себя план занятий. Каждое занятие состоит из нескольких частей, а именно в нем содержатся: теоретическая часть, закрепляющий материал, задачи для самостоятельной и домашней работы. Для каждой части занятия имеется примерное время выполнения. Основными формами проведения занятий являются: лекции, объяснение, практическая работа. Все занятия направлены на развитие интереса школьников к предмету, на расширение представлений об изучаемом материале, на решении новых и интересных задач.

Факультативный курс «Модуль» включает в себя методы, позволяющие решать широкий круг заданий на тему модуль. Знания, умения и навыки, полученные в ходе решения уравнений и неравенств, а также в построении графиков, содержащих переменную под знаком модуля, необходимы учащимся не только для успешной подготовки и сдачи единого государственного экзамена, но и для хорошей подготовки к школьным олимпиадам. Данный курс направлен на развитие, а также выявление математических способностей, становление интереса к данному предмету, ориентирован на выбор профиля, связанный с математикой для дальнейшего обучения.

Цели курса:

1 Повышение понимания и практической подготовки учащихся в вопросах, связанных с:

а) преобразованием выражений, которые содержат модуль;

б) решением уравнений и неравенств, содержащих модуль;

в) построением графиков элементарных функций, содержащих модуль.

2 Создание базы для развития способностей учащихся.

3 Помощь в понимании учащимся степень интереса к предмету, а также оценка своих возможностей овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы.

Задачи курса:

1 Научить преобразовывать выражения, содержащие модуль.

2 Научить решать уравнения и неравенства, содержащие модуль.

3 Научить строить графики, содержащие модуль.

4 Помочь овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне свободного их использования.

5 Подготовить учащихся к выполнению задания, связанного с модулем, ЕГЭ профильного уровня.

2. 3 Тематическое планирование

Таблица 1 – Учебно–тематический план факультативного курса по алгебре, теме: «Модуль»

Номер занятия	Тема	Кол-во часов
Общие сведения о модуле. Преобразование выражений, решение уравнений и неравенств, содержащих модуль (6 часов)		
1	Общие сведенья о модуле. Определение, геометрический смысл, свойства модуля. Применение определения модуля при решении уравнений	1
2	Метод интервалов для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль	1
3	Решение неравенств с модулем посредством равносильных переходов	1
4	Решением уравнений и неравенств с модулями на координатной прямой	1
5	Модуль и иррациональные уравнения	1
6	Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком модуля	1
Графики функций, содержащих модуль (7 часов)		
7–8	Построение графиков функций вида $y = f(\|x\|)$, $y = \|f(x)\|$, $y = \|f(\|x\|)\|$	2
9–10	Построение графиков функции вида $y = \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\| + \cdots + \|f_n(x)\|$, $\|y\| = f(x)$, $\|y\| = \|f(x)\|$, и графиков неявно заданных функций	2

11	Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом	1
12	Решение уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих модуль, графическим способом.	1
13	Урок контроля знаний, умений и навыков учащихся по изученному курсу «Модуль числа»	1
Модуль в заданиях единого государственного экзамена (1 час)		
14	Модуль в заданиях Единого Государственного Экзамена	1

2. 4 Материал к занятиям

2. 4. 1 Занятие 1. Общие сведенья о модуле. Определение, геометрический смысл, свойства модуля. Применение определения модуля при решении уравнений

Цели:

1 Повторить знания учащихся.

2 Рассмотреть определение, геометрический смысл и его свойства модуля действительного числа.

Методические рекомендации:

Решение упражнений должно сопровождаться объяснением, которое опирается на определение модуля действительного числа, а также его геометрический смысл. Обратить внимание учащихся на то, что в определении модуля действительного числа, число x может быть как положительным, так и отрицательным.

План занятия.

1 Лекция. (18 минут)

2 Решение упражнений. (18 минут)

3 Упражнения для самостоятельной работы. (9 минут)

4 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Лекция.

Определение. «Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само число, если оно неотрицательное, и число противоположное ему, если x отрицательное:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$ » ([7]) (2)

Геометрический смысл модуля действительного числа. Модулем числа называется расстояние от начала координат до точки, изображающей данное число на координатной прямой.

Свойства модуля действительного числа:

1) модуль любого действительного числа x есть неотрицательное число:

$$|x| \geq 0. \quad (3)$$

2) модуль произведения двух или более множителей равен произведению модулей этих чисел:

$$|xy| = |x||y|. \quad (4)$$

3) модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \quad (5)$$

4) квадрат модуля какого–либо числа равен квадрату этого числа:

$$|x|^2 = x^2. \quad (6)$$

5) модуль любого числа равен модулю этого числа, взятым с противоположным знаком:

$$|x| = |-x|. \quad (7)$$

6) модуль любого числа не меньше самого числа:

$$|x| \geq x. \quad (8)$$

7) модуль суммы двух или более слагаемых не больше суммы их модулей:

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (9)$$

Тождество. Квадратный корень квадрата числа равен модулю этого числа:

$$\sqrt{x^2} = |x|. \quad (10)$$

2 Решение упражнений.

Рассмотрим примеры, демонстрирующие различные методы решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Пример 1. Решите уравнение:

$$|2x - x^2 + 3| = 1.$$

Решение:

1 способ:

Из определения модуля, следует, что значение выражения $2x - x^2 + 3$ может быть равно 1 или -1. То есть, уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - x^2 + 3 \geq 0, \\ 2x - x^2 + 3 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - x^2 + 3 < 0, \\ -(2x - x^2 + 3) = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы данной совокупности находим, что $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, а из второй $x_3 = 1 - \sqrt{5}$, $x_4 = 1 + \sqrt{5}$.

2 способ:

Обе части уравнения имеют одинаковые знаки, то уравнение, по свойству модуля, будет равносильно следующему уравнению:

$$(2x - x^2 + 3)^2 = 1.$$

Принимая во внимание, что $|x|^2 = x^2$, получим уравнение равносильное данному:

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0.$$

Решая последнее находим, что корни уравнения $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1 + \sqrt{3}$; $x_3 = 1 - \sqrt{5}$; $x_4 = 1 + \sqrt{5}$.

Ответ: $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1 + \sqrt{3}$; $x_3 = 1 - \sqrt{5}$; $x_4 = 1 + \sqrt{5}$.

Пример 2. Решите уравнение:

$$|x^2 - 3x| = 4x - 7.$$

Решение:

Правая часть данного уравнения содержит выражение с переменной. Поэтому уравнение имеет решение при условии, что $4x - 7 \geq 0$. В этом случае

обе части уравнения неотрицательны, избавимся от модуля, возведя обе части в квадрат. Получим равносильную уравнению следующую систему:

$$\begin{cases} 4x-7\geq 0, \\ (x^2-3x)^2=(4x-7)^2. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4x-7\geq 0, \\ x^4-6x^3-7x^2+56x-49=0. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq \frac{7}{4}, \\ x_1=\frac{-1-\sqrt{29}}{2};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}; x_3=\frac{7-\sqrt{21}}{2};\ x_4=\frac{7+\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

Данная система имеет решение при $x_1=\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ x_2=\frac{7+\sqrt{21}}{2}$, а следовательно, уравнение имеет корни $x_1=\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ x_2=\frac{7+\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $x_1=\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ x_2=\frac{7+\sqrt{21}}{2}$.

В некоторых уравнениях встречается «вложенный» модуль, то есть модуль какого-то выражения является частью подмодульного выражения, например:

$$\big||x-5|\big|=3.$$

В этом случае раскрывать модули необходимо поочерёдно. Какой модуль будет раскрываться первым, зависит от того, каким методом необходимо решить это уравнение. Рассмотри два возможных варианта на данном уравнении.

Пример 3. Решите уравнение:

$$\big||x|-5\big|=3.$$

Решение:

1 способ:

Раскроем «внешний» модуль, тогда уравнение будет равносильно совокупности:

$$\begin{bmatrix} |x|-5=3, \\ |x|-5=-3. \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} |x|=8, \\ |x|=2. \end{bmatrix} \leftrightarrow x_1=8; x_2=-8; x_3=2; x_4=-2.$$

2 способ:

Необходимо раскрывать модули, начиная с самых «внутренних». 3. Упражнения для самостоятельной работы.

Раскроем сначала, по определению, «внутренний» модуль. Тогда получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ |x-5|=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ |-x+5|=3.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x-5=3,\\ x-5=-3.\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}-x-5=3,\\ -x-5=-3.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x_1=8,\\ x_2=2.\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x_3=-8,\\ x_4=-2.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow x_1=8; x_2=2; x_3=-8;$$

$$x_4=-2.$$

Ответ: $x_1=8; x_2=2; x_3=-8;\ x_4=-2.$

3 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решите уравнение, первым способом:

$$\big||x|-2\big|=7.$$

Решение:

Представлено в приложении А.

Пример 5. Решите уравнение, вторым способом:

$$\big|1-|1-x|\big|=0{,}5.$$

Решение:

Представлено в приложении А.

4 Домашнее задание.

Упражнения для домашней работы, которые предлагаются учащимся для закрепления темы.

Пример 6. Решите уравнение:

$$|2x|=3x-1.$$

Решение:

Данное уравнение может быть решено двумя способами. Рассмотрим первый. Повторяя рассуждения, приведенные ранее, получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x \geq 0,\\ 2x=3x-1;\end{cases}\\ \begin{cases}2x<0,\\ -2x=3x-1.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ x=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x=\frac{1}{5}.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow x=1.$$

Следовательно, решением данного уравнения является $x=1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 7. Решите уравнение вторым способом:

$$\big||x| - 2\big| = |x|.$$

Решение:

Возведем обе части в квадрат (так как $|x|^2 = x^2$), получим:

$$(|x| - 2)^2 = x^2,$$

$$x^2 - 4|x| + 4 = x^2,$$

$$4|x| - 4 = 0,$$

$$|x| = 1.$$

Тогда, по определению модуля следует, что $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = 1$.

2. 4. 2 Занятие 2. Метод интервалов для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль

Цели:

1 Закрепить изученный материал. Познакомить учащихся с решением уравнений и неравенств, содержащих модуль.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (5 минут)

2 Алгоритм решения уравнений и неравенств, содержащих переменю под знаком модуля методом интервалов. (10 минут)

3 Решение задач. (15 минут)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Алгоритм решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля методом интервалов.

Алгоритм решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля методом интервалов.

Для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль, существует универсальный метод, называемый методом интервалов. Для того, чтобы им воспользоваться, необходимо: найти область определения заданной функции, далее отметить в этой области нули функции, то есть те точки, в которых данная функция обращается в ноль, они будут разбивать область определения на промежутки, внутри каждого из которых функция определена, непрерывна, а также сохраняет свой знак. Для определения знака функции на конкретном промежутке достаточно знать знак в какой–либо точке этого промежутка. Определение таких интервалов основано на следующей теореме:

Теорема. Если на интервале $(a; b)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет знак. ([2])

Изменения знаков функции на искомых промежутках будем осуществлять с помощью таблицы.

Общий алгоритм:

1) находим область определения и нули подмодульных выражений;

2) образуем интервалы, получившиеся при разбиении области определения функции нулями подмодульных выражений;

3) определяем знак подмодульных выражений на каждом из интервалов;

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получаем совокупность, равносильную данному уравнению;

5) решая её, записываем ответ.

Методические рекомендации:

При решении уравнений и неравенств, содержащих модуль, методом интервалов, на первом занятии необходимо выполнять решение задач по пунктам, и также отмечать их. При последующих занятиях данное действие можно не выполнять.

3 Решение задач.

Рассмотрим метод интервалов на примерах.

Пример 1. Решите уравнение:

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$$

Решение:

1) область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1; x_4 = 2;$

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty;-1)$, $[-1;0)$, $[0;1)$, $[1;2)$, $[2;+\infty)$;

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 2:

Таблица 2

	$(-\infty;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;+\infty)$
$\|x+1\|$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\|x\|$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\|x-1\|$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\|x-2\|$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<0,\\x+1+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<1,\\x+1-x-3(x-1)+2(x-2)=x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\x+1-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\x+1-x+3(x-1)-2(x-2)=x+2.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\x=-2.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<0,\\0*x=2;\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<1,\\x=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\x=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\0*x=0.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < -1,\\ x = -2.\end{cases}\\ \begin{cases}-1 \le x < 0,\\ \text{нет решения;}\end{cases}\\ \begin{cases}0 \le x < 1,\\ \text{нет решения;}\end{cases}\\ \begin{cases}1 \le x < 2,\\ \text{нет решения;}\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge 2,\\ x \in \mathbb{R}.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow x \in (-2) \cup [2; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-2) \cup [2; +\infty)$.

Данный прием применяется и при решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Пример 2. Решите неравенство:

$$|x^2 - 3x| + x - 2 < 0.$$

Решение:

1) область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульного выражения $x_1 = 0; x_2 = 3;$

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; 0), [0; 3), [3; +\infty);$

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 3:

Таблица 3

	$(-\infty; 0)$	$[0; 3)$	$[3; +\infty)$
$\lvert x^2 - 3x\rvert$	+	−	+

4) учитывая знаки, раскроем модуль. В результате получим совокупность равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 0 \text{ или } x \ge 3,\\ x^2 - 3x + x - 2 < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}0 < x < 3,\\ -(x^2 - 3x) + x - 2 < 0.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 0 \text{ или } x \ge 3,\\ x^2 - 2x - 2 < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}0 < x < 3,\\ -x^2 + 4x - 2 < 0.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} x \le 0 \text{ или } x \ge 3, \\ 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3}; \end{cases} \right. \leftrightarrow x \in (1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{2})$$
$$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{2})$.

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 3. Решите уравнение:

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| = 4.$$

Решение:

Представлено в приложении Б.

Пример 4. Решите уравнение:

$$|6-2x| + |3x+7| - 2|4x+11| = x-3.$$

Решение:

Представлено в приложении Б.

5 Домашнее задание.

Пример 5. Решите неравенство:

$$|x-1| + |x+2| \le 3.$$

Решение:

1) область определения подмодульных функций − все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$;

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; -2)$, $[-2; 1)$, $[1; +\infty)$;

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 4:

Таблица 4

	$(-\infty; -2)$	$[-2; 1)$	$[1; +\infty)$
$\|x-1\|$	−	−	+
$\|x+2\|$	−	+	+

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -2, \\ -(x-1)-(x+2) \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ -(x-1)+(x+2) \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ (x-1)+(x+2) \le 3. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -2, \\ x \ge -2; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ 3 \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 1. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -2, \\ \text{нет решения}; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ \text{нет решения}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 1. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 6. Решите неравенство:

$$|x-1| \le |2x-3| - |x-2|.$$

Решение:

Перенесем выражение, стоящее справа, в левую часть, тогда получим:

$$|x-1| - |2x-3| + |x-2| \le 0.$$

1) область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = 2$;

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; 1)$, $\left[1; \frac{3}{2}\right)$, $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$, $[2; +\infty)$;

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 5:

Таблица 5

	$(-\infty; 1)$	$\left[1; \frac{3}{2}\right)$	$\left[\frac{3}{2}; 2\right)$	$[2; +\infty)$
$\|x-1\|$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\|2x-3\|$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\|x-2\|$	$-$	$-$	$-$	$+$

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -1, \\ -(x-1) + (2x-3) - (x-2) \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < \frac{3}{2}, \\ (x-1) + (2x-3) - (x-2) \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{3}{2} \le x < 2, \\ (x-1) - (2x-3) - (x-2) \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ (x-1) - (2x-3) + (x-2) \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -1, \\ 0 * x \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < \frac{3}{2}, \\ x \le 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{3}{2} \le x < 2, \\ x \ge 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ 0 * x \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -1, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < \frac{3}{2}, \\ x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{3}{2} \le x < 2, \\ \text{нет решения}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$.

2. 4. 3 Занятие 3. Решение неравенств с модулем посредством равносильных переходов

Цели:

1 Познакомить учащихся с решением неравенств с модулем посредством равносильных переходов.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (5 минут)

2 Объяснение материала. (15 минут)

3 Решение задач. (10 минут)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Объяснение материала.

1) неравенство вида:

$$|f(x)| \le a. \tag{10}$$

Решение:

а) если $a < 0$ – неравенство не имеет решения.

б) если $a = 0$ – решением неравенства будет решение уравнения $f(x) = 0$.

в) если $a > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} f(x) \le a, \\ f(x) \ge -a. \end{cases} \tag{12}$$

2) неравенство вида:

$$|f(x)| < a. \tag{13}$$

Решение:

а) если $a < 0$ – неравенство не имеет решения.

б) если $a = 0$ – неравенство не имеет решения.

в) если $a > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases} \tag{14}$$

3) неравенство вида:

$$|f(x)| \ge a. \tag{15}$$

Решение:

а) если $a < 0$ – неравенство верно для любых x из области определения $f(x)$.

б) если $a = 0$ – неравенство верно для любых x из области определения $f(x)$.

в) если $a > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной совокупности:

$$\begin{bmatrix} f(x) \geq a, \\ f(x) \leq -a. \end{bmatrix} \quad (16)$$

4) неравенство вида:

$$|f(x)| > a. \quad (17)$$

Решение:

а) если $a < 0$ – неравенство верно для любых x из области определения $f(x)$.

б) если $a = 0$ – решением неравенства будет решение равносильной совокупности:

$$\begin{bmatrix} f(x) \neq 0, \\ x \in D(f). \end{bmatrix} \quad (18)$$

в) если $a > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной совокупности:

$$\begin{bmatrix} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{bmatrix} \quad (19)$$

5) неравенство вида:

$$|f(x)| < g(x). \quad (20)$$

Решение:

а) если $g(x) < 0$ – неравенство не имеет решения.

б) если $g(x) = 0$ – неравенство не имеет решения.

в) если $g(x) > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \quad (21)$$

6) не равенство вида

$$|f(x)| \leq g(x). \quad (22)$$

Решение:

а) если $g(x) < 0$ – неравенство не имеет решения

б) если $g(x) = 0$ – решением неравенства будет решение уравнения $f(x) = 0$.

в) если $g(x) > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases} \quad (23)$$

7) неравенство вида:

$$|f(x)| > g(x). \quad (24)$$

Решение:

а) если $g(x) < 0$ – неравенство верно для любых x из области определения $f(x)$ и $g(x)$.

б) если $g(x) = 0$ – решением неравенства будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} f(x) \ne 0, \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases} \quad (25)$$

в) если $g(x) > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной совокупности:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases} \quad (26)$$

8) неравенство вида:

$$|f(x)| \ge g(x). \quad (27)$$

Решение:

а) если $g(x) < 0$ – неравенство верно для любых x из области определения $f(x)$ и $g(x)$.

б) если $g(x) = 0$ – неравенство верно для любых x из области определения $f(x)$ и $g(x)$.

в) если $g(x) > 0$ – решением неравенства будет решение равносильной совокупности:

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{cases} ([11]) \quad (28)$$

3 Решение задач.

Рассмотрим примеры на применение данных правил.

Пример 1. Решите неравенство:

$$|x^2 - 3x| + x - 2 < 0.$$

Решение:

Данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$$|x^2 - 3x| < 2 - x.$$

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\begin{cases} x^2 - 3x < 2 - x, \\ x^2 - 3x > -(2 - x). \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 < 0, \\ x^2 - 4x + 2 > 0. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}), \\ x \in (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty). \end{cases}$$

Обозначим числовые промежутки на оси и их пересечение:

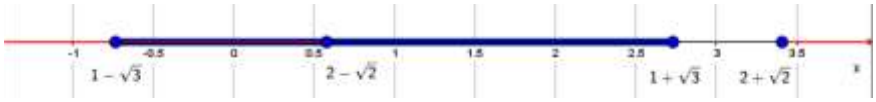

Рисунок 4

Следовательно, решение системы является $x \in (1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{2})$.

Ответ: $x \in (1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{2})$.

Пример 2. Решите неравенство:

$$\left|2x + 1 + |3x + 1|\right| \geq x + 2.$$

Решение:

Раскроем внешний модуль. От данного неравенства перейдем к совокупности неравенств:

$$\begin{bmatrix} 2x + 1 + |3x + 1| \geq x + 2, \\ 2x + 1 + |3x + 1| \leq -(x + 2). \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} |3x + 1| \geq -x + 1, \\ |3x + 1| \leq -3x - 3. \end{bmatrix}$$

Воспользуемся равносильными переходами:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x + 1 \leq -x + 1, \\ 3x + 1 \geq -(-x + 1); \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 3x + 1 \leq -3x - 3, \\ 3x + 1 \geq -(-3x - 3). \end{cases} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \leq 0, \\ x \geq 1; \end{bmatrix} \\ \begin{cases} x \leq \frac{2}{3}, \\ 0 * x \leq 2. \end{cases} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \leq 0, \\ x \geq 1; \end{bmatrix} \\ \begin{cases} x \leq \frac{2}{3}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{bmatrix} \leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{2}{3}]$$

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{2}{3}]$.

Пример 3. Решите неравенство:

$$|x^2 - 5x| \leq 6.$$

Решение:

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 6, \\ x^2 - 5x \geq -6. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6, \\ x \leq 2 \text{ или } x \geq 3. \end{cases}$$

Обозначим числовые промежутки на оси, и найдем их пересечение:

Рисунок 5

Следовательно, решением данного неравенства является числовые отрезки $[-1; 2]$ и $[3; 6]$.

Ответ: $x \in [-1; 2] \cup [3; 6]$.

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решите неравенство:

$$|x^2 - 8| \geq 1.$$

Решение:

Представлено в приложении В.

Пример 5. Решить неравенство:

$$|x^2 - 3x + 2| > x + 3.$$

Решение:

Представлено в приложении В.

Пример 6. Решить неравенство:

$$|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3.$$

Решение:

Представлено в приложении В.

5 Домашнее задание.

Пример 7. Решите неравенство:

$$|x + 5| > 11.$$

Решение:

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\left[\begin{array}{l} x+5>11, \\ x+5<-11. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<-16. \end{array}\right. \leftrightarrow x \in (-\infty;-16) \cup (6;+\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;-16) \cup (6;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство:

$$|2x-5|<3.$$

Решение:

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5<3, \\ 2x-5>-3. \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<4, \\ x>1. \end{array}\right. \leftrightarrow x \in (1;4).$$

Ответ: $x \in (1;4)$.

2. 4. 4 Занятие 4. Решением уравнений и неравенств с модулями на координатной прямой

Цели:

1 Познакомить учащихся с решением уравнений и неравенств с модулями на координатной прямой.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (5 минут)

2 Объяснение материала. (15 минут)

3 Решение задач. (10 минут)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Объяснение материала.

«Расстояние между точками $\mathcal{a}$ и $\mathcal{b}$ равно модулю разности координат этих точек $|\mathcal{a}-\mathcal{b}|$.

Обычно вместо $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{B}(b)$ пишут просто a и b, а расстояние между точками a и b обозначают $\rho(a,b)$, (ρ – «ро», буква греческого алфавита). Запись $\rho(a,b)$ читается: «ро от a, b». Таким образом $\rho(a,b) = |a-b|$.» ([5]).

Используя данную формулу, можно решать уравнения и неравенства вида: $|x-a|=b$, $|x-a|=|x-b|$, $|x-a|<b$, $|x-a|<|x-b|$, $|x-a|>|x-b|$, а также уравнения и неравенства, сводящиеся к ним.

3 Решение задач.

Пример 1. Решите уравнение:

$$|x-3|=1.$$

Решение:

Запись данного уравнения переводится на «язык расстояний» следующим образом: «Расстояние от точки с координатой x до точки с координатой 3 равно 1». Тогда, решением уравнения являются точки, удаленные от точки с координатой 3 на расстояние 1. Эти точки имеют координаты 2 и 4.

Ответ: $x_1=2; x_2=4$.

Пример 2. Решите уравнение:

$$|2x+1|=3.$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{3}{2}$, используя формулу расстояния. Тогда, точки, удаленные от точки с координатой $-\frac{1}{2}$ на расстояние $\frac{3}{2}$, имеют координаты 1 и 2.

Ответ: $x_1=1; x_2=2$.

Можно решать и неравенства, используя аналогичные рассуждения.

Пример 3. ([11]) Решите неравенство:

$$|x-3|<1.$$

Решение:

Числа, удаленные от 3 на расстояние 1 равны 2 и 4. По условию требуется найти точки, удаленные от 3 на расстояние меньше 1. Такие точки расположены между 2 и 4.

Ответ: $(2; 4)$.

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решить неравенство:

$$|x - 1| < 2.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

Пример 5. Решить неравенство:

$$|x + 1| > 2.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

Пример 6. Решите уравнение:

$$|x - 2| = 0{,}4.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

Пример 7. Решите уравнение:

$$|x + 3| = 0{,}7.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

Пример 8. Решить неравенство:

$$|x - 2{,}5| \leq 0{,}5.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

Пример 9. Решить неравенство:

$$|10 - x| < 7.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

Пример 10. Решить неравенство:

$$|x + 1| > 1.$$

Решение:

Представлено в приложении Г.

5 Домашнее задание.

Пример 11. Решить неравенство:

$$|x + 8| \geq 0{,}7.$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $|x - (-8)| \geq 0{,}7$, используя формулу расстояния. Тогда, точки, удаленные от точки с координатой -8 на расстояние, больше и равное $0{,}7$. Решением данного неравенства являются числа, принадлежащие промежутку $x \in (-\infty; -8{,}7] \cup [-7{,}3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -8{,}7] \cup [-7{,}3; +\infty)$.

Пример 12. Решите уравнение:

$$|x + 4| = |x - 1|.$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $|x - (-4)| = |x - 1|$, используя формулу расстояния. Исходя из геометрических представлений, следует, что корнем последнего уравнения является координата точки, удаленная от точек с координатами -4 и 1. Данному условию удовлетворяет лишь одна точка с координатой $-2{,}5$.

Ответ: $x = -2{,}5$.

Пример 13. Решить неравенство:

$$|x| \leq 1.$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $|x - 0| \leq -1$, используя формулу расстояния. Числа, удаленные от 0 на расстояние 1 равны -1 и 1. По условию требуется найти точки, удаленные от 0 на расстояние меньше или равное 1. Такие точки расположены между -1 и 1, включая данные точки, так как неравенство строгое.

Ответ: $x \in [-1; 1]$.

2. 4. 5 Занятие 5. Модуль и иррациональные уравнения

Цели:

1 Познакомить учащихся с решением иррациональных уравнений с помощью модуля.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (5 минут)

2 Объяснение материала. (5 минут)

3 Решение задач. (20 минут)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Объяснение материала.

При решении иррациональных уравнений иногда возникает необходимость использования модуля. Приведем пример.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1.$$

Решение:

Пусть $y=\sqrt{x+1}$, где $y \geq 0$, тогда выражение примет вид:

$$y^2=x+1.$$

Следовательно:

$$y^2+4=x+5,$$

$$y^2+9=x+10$$

Таким образом, данное уравнение примет вид:

$$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению, по свойству модуля:

$$|y-2|+|y-3|=1,$$

Решим его, используя метод интервалов.

Область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $y_1 = 2;\ y_2 = 3$.

Полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $[0; 2), [2; 3), [3; +\infty)$, с учетом, что $y \geq 0$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 6:

Таблица 6

	$[0; 2)$	$[2; 3)$	$[3; +\infty)$
$\lvert y - 2\rvert$	$-$	$+$	$+$
$\lvert y - 3\rvert$	$-$	$-$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \leq y < 2,\\ -(y-2)-(y-3)=1;\end{cases}\\ \begin{cases}2 \leq y < 3,\\ y-2-(y-3)=1;\end{cases}\\ \begin{cases}y \geq 3,\\ y-2+y-3=1.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \leq y < 2,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}2 \leq y < 3,\\ 0*y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}y \geq 3,\\ y=3.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \leq y < 2,\\ \text{решений нет};\end{cases}\\ \begin{cases}2 \leq y < 3,\\ y \in \mathbb{R};\end{cases}\\ \begin{cases}y \geq 3,\\ y=3.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$2 \leq y \leq 3.$$

Вернемся к замене переменной. Так как $y = \sqrt{x+1}$, где $y \geq 0$, то:

$$2 \leq y \leq 3,$$

$$2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3,$$

$$4 \leq x+1 \leq 9,$$

$$3 \leq x \leq 8.$$

Следовательно, решением данного уравнения является числовой отрезок $x \in [3; 8]$.

Ответ: $x \in [3; 8]$.

3 Решение задач.

Пример 2. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 10.$$

Решение:

Данное уравнение равносильно уравнению:

$$\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(2x-1)^2}=10,$$

по свойству модуля:

$$|x-4|+|2x-1|=10,$$

решим последнее уравнение методом интервалов.

Область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1=4; x_2=\frac{1}{2}$.

Полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2};4\right), [4;+\infty)$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 7:

Таблица 7

	$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{2};4\right)$	$[4;+\infty)$
$\lvert x-2\rvert$	$-$	$-$	$+$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-$	$+$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\-(x-4)-(2x-1)=10;\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{2}\le x<4,\\-(x-4)+(2x-1)=10;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\(x-4)+(2x-1)=10.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\x=-\frac{5}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{2}\le x<4\\x=7;\end{cases}\leftrightarrow\\ \begin{cases}x\ge 4,\\x=\frac{5}{3}.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\x=-\frac{5}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{2}\le x<4\leftrightarrow\\\text{решений нет};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\\text{решений нет.}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$x=-\frac{5}{3}.$$

Ответ: $x=-\frac{5}{3}$.

Пример 3. Решите уравнение:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-5\right)^2}=3.$$

Решение:

Пусть $y = \sqrt{x-1}$, где $y \geq 0$, тогда выражение примет вид:

$$\sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-5)^2} = 3,$$

по свойству модуля, имеем, что последнее уравнение равносильно уравнению:

$$|y-2| + |y-5| = 3.$$

Решим его методом интервалов.

Область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $y_1 = 2;\ y_2 = 5$.

Полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $[0;2), [2;5), [5;+\infty)$, с учетом, что $y \geq 0$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 8:

Таблица 8

	$[0;2)$	$[2;5)$	$[5;+\infty)$
$\lvert y-2\rvert$	$-$	$+$	$+$
$\lvert y-5\rvert$	$-$	$-$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \leq y < 2,\\ -(y-2)-(y-5)=3;\end{cases}\\ \begin{cases}2 \leq y < 5,\\ y-2-(y-5)=3;\end{cases}\\ \begin{cases}y \geq 5,\\ (y-2)+(y-5)=3.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \leq y < 2,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}2 \leq y < 5,\\ 0 \cdot y = 0;\end{cases}\\ \begin{cases}y \geq 5,\\ y=5.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \leq y < 2,\\ \text{решений нет};\end{cases}\\ \begin{cases}2 \leq y < 5,\\ y \in \mathbb{R};\end{cases}\\ \begin{cases}y \geq 5,\\ y=5.\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$2 \leq y \leq 5.$$

Вернемся к замене переменной. Так как $y = \sqrt{x-1}$, где $y \geq 0$, то:

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 5,$$

$$4 \leq x-1 \leq 25,$$

$$5 \leq x \leq 26.$$

Следовательно, решением данного уравнения является множество $x \in [5;26]$.

Ответ: $x \in [5;26]$.

4. Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решите уравнение:

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$$

Решение:

Представлено в приложении Д.

5. Домашнее задание.

Пример 5. Решите уравнение:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2.$$

Решение:

Пусть $y=\sqrt{2x-1}$, где $y\geq 0$, тогда выражение примет вид:

$$y^2=2x-1.$$

Следовательно:

$$x=\frac{y^2+1}{2}.$$

Тогда, данное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\frac{y^2+1}{2}+2y}+\sqrt{\frac{y^2+1}{2}-2y}=2,$$

$$\sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{(y-1)^2}=2\sqrt{2}.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению:

$$|y+1|+|y-1|=2\sqrt{2}.$$

Решим его методом интервалов.

Область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $y_1=-1; y_2=1$.

Полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $[0;1), [1;+\infty)$, с учетом, что $y\geq 0$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 9:

Таблица 9

	$[0;1)$	$[1;+\infty)$
$\lvert y+1\rvert$	+	+

$\lvert y-1\rvert$	−	+

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим систему, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{cases} 0 \le y < 1, \\ (y+1)-(y-1)=2\sqrt{2}; \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \le y < 1, \\ 0 \cdot y = 2\sqrt{2}; \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \le y < 1, \\ \text{решений нет}; \end{cases} \right.\right.\right.$$

$$\left[\begin{cases} y \ge 1, \\ y+1+y-1=2\sqrt{2}. \end{cases} \right. \left[\begin{cases} y \ge 1, \\ y=\sqrt{2}. \end{cases} \right. \left[\begin{cases} y \ge 1, \\ y=\sqrt{2}. \end{cases} \right. \leftrightarrow y=\sqrt{2}.$$

Вернемся к замене переменной. Так как $y=\sqrt{x+1}$, где $y \ge 0$, то:

Следовательно:

$$\sqrt{2}=\sqrt{2x-1},$$

$$2=2x-1,$$

$$x=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $x=\frac{3}{2}$.

2. 4. 6 Занятие 6. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком модуля

Цели:

1 Познакомить учащихся с преобразование выражений, содержащих переменную под знаком модуля.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (3 минуты)

2 Объяснение материала. (7 минут)

3 Решение задач. (20 минут)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Объяснение материала.

Понятие модуля находит применение при оперировании арифметическими корнями. Так как арифметический квадратный корень из числа может принимать лишь неотрицательное значение, то при записи этих значений используется модуль. Например:

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2, \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2.$$

Рассмотрим примеры на преобразование выражений, при решении которых используется модуль, свойства модуля и преобразование выражений, содержащих модуль.

Пример 1.Упростите выражение:

$$\frac{a^2+4}{|a|+2}.$$

Область допустимых значений:

Дробь определена для любых значений a.

Решение:

Рассмотрим два случая на числовой прямой, когда $a \geq 0$ и $a < 0$:

$$\begin{cases} \frac{a^2+4}{a+2}, a \geq 0, \\ \frac{a^2+4}{-a+2}, a < 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a-2)(a+2)}{(a+2)}, a \geq 0, \\ \frac{(a-2)(a+2)}{-(a-2)}, a < 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2+4}{a+2}, a-2 \geq 0, \\ \frac{a^2+4}{-a+2}, -(a+2) < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a-2, a \geq 0, \\ -(a+2), a < 0. \end{cases}$

3 Решение задач.

Пример 2. Упростите выражение:

$$\frac{a^2-|a|+1-a}{|a-1|}.$$

Область допустимых значений:

Дробь определена при $a \neq 1$.

Решение:

Нули подмодульных выражений: $a_1 = 0;\ a_2 = 1.$ С учётом области допустимых значений, данные точки делят числовую ось на три интервала $(-\infty; 0), [0; 1), (1; +\infty)$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 10:

Таблица 10

	$(-\infty; 0)$	$[0; 1)$	$(1; +\infty)$
$\lvert a \rvert$	$-$	$+$	$+$
$\lvert a - 1 \rvert$	$-$	$-$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0, \\ \dfrac{a^2 + a + 1 - a}{-a + 1}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le a < 1, \\ \dfrac{a^2 - a + 1 - a}{-a + 1}; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ \dfrac{a^2 - a + 1 - a}{a - 1}. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0, \\ \dfrac{a^2 + 1}{1 - a}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le a < 1, \\ 1 - a; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ a - 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<0, \\ \frac{a^2+1}{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le a < 1, \\ 1 - a; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ a - 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 3. Упростите выражение:

$$\frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}}.$$

Область допустимых значений:

Дробь определена при любом a, креме случая, когда $a = 0$.

Решение:

$$\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}=\frac{a^2+4}{\sqrt{a^2\left(\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4\right)}}=\frac{a^2+4}{\sqrt{a^2\left(\frac{a^2+8a^2+16}{4a^2}\right)}}=$$

$$=\frac{a^2+4}{\sqrt{a^2\left(\frac{a^2+8a^2+16}{4a^2}\right)}}=\frac{2(a^2+4)}{\sqrt{(a^2+4)^2}}=\frac{2(a^2+4)}{|a^2+4|}.$$

Так как, $|a^2+4|>0$, при любом a, следовательно:

$$\frac{2(a^2+4)}{|a^2+4|}=\frac{2(a^2+4)}{(a^2+4)}=2.$$

Ответ: 2.

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+4}}.$$

Решение:

Представлено в приложении Е.

Пример 5. Упростите выражение:

$$\frac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}.$$

Решение:

Представлено в приложении Е.

5 Домашнее задание.

Пример 6. Упростите выражение, при всех неотрицательных x:

$$\frac{4}{x^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2}.$$

Область допустимых значений:

Данное выражение возможно при любых x, кроме случая, когда $x\neq 0$.

Решение:

$$\frac{4}{x^2+1}\sqrt{-1+\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2}=\frac{4}{x^2+1}\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}=\frac{4}{x^2+1}\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}=$$

$$=\frac{2}{x^2+1}\frac{|x^2-1|}{|x|}.$$

Нули подмодульных выражений: $x_1=-1;\ x_2=1;\ x_3=0$. Данные точки делят числовую ось на четыре интервала $(-\infty;-1),[-1;0),[0;1),(1;+\infty)$, с учетом области допустимых значений и условием, имеем $(0;1),(1;+\infty)$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 11:

Таблица 11

	$(0;1)$	$[1;+\infty)$
$\lvert x^2-1\rvert$	$-$	$+$
$\lvert x\rvert$	$+$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{2}{x^2+1}\dfrac{\left(-(x^2-1)\right)}{x}; \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{-2}{x}; \end{cases}\right.$$

$$\left.\begin{cases} x\geq 1, \\ \dfrac{2}{x^2+1}\dfrac{(x^2-1)}{x}. \end{cases}\right. \left.\begin{cases} x\geq 1, \\ \dfrac{2}{x}. \end{cases}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{-2}{x}; \end{cases}\right.$

$\left.\begin{cases} x\geq 1, \\ \dfrac{2}{x}. \end{cases}\right.$

Пример 7. Упростите выражение:

$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}-2\sqrt{x^2-10x+25}$, если а) $x<-1$; б) $-1<x<2$; в) $2<x<5$; г) $x>5$.

Решение:

По формулам квадрата суммы, разности имеем:

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-5)^2}.$$

По тождеству:

$$|x-2|+|x+1|-2|x-5|.$$

Нулями подмодульных выражений являются $2,\ -1,\ 5$. Данные точки делят числовую ось на интервалы $(-\infty;-1),(-1;2),(2;5),(5;+\infty)$. Определим знак подмодульных выражений на каждом из интервалов (Таблица 12):

Таблица 12

	$(-\infty;-1)$	$(-1;2)$	$(2;5)$	$(5;+\infty)$
$\lvert x-2\rvert$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\lvert x-5\rvert$	$-$	$-$	$-$	$+$

На каждом из интервалов выражение примет вид:

а) $\begin{cases} x<-1, \\ -(x-2)-(x+1)+2(x-5). \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<-1, \\ -11. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -1<x<2, \\ -(x-2)+(x+1)+2(x-5). \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2, \\ -7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2<x<5, \\ (x-2)+(x+1)+2(x-5). \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2<x<5, \\ 4x-11. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x>5, \\ (x-2)+(x+1)-2(x-5). \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ 4x+9. \end{cases}$

Ответ: а) $\begin{cases} x<-1, \\ -11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -1<x<2, \\ -7. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2<x<5, \\ 4x-11. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x>5, \\ 4x+9. \end{cases}$

2. 4. 7 Занятие 7–8. Построение графиков функций вида $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$, $y=|f(|x|)|$

Цели:

1 Познакомить учащихся построением графиков функций вида $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$, $y=|f(|x|)|$.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (5 минут)

2 Алгоритмы построения графиков функций вида $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$, $y=|f(|x|)|$. Примеры. (60 минут)

3 Решение задач. (15 минут)

4 Упражнение для самостоятельной работы. (10 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Алгоритмы построения графиков функций вида $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$. Примеры.

Для того чтобы научиться строить функции $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$, содержащие знак модуля, необходимо не только умение учащихся в построении графиков элементарных функций, но и понимание и осознание определения модуля действительного числа.

Способы построения графиков:

1) по определению модуля;

2) на основании алгоритма геометрического преобразования графиков функций.

Рассмотрим оба способа.

«Построение графика функции $y = |f(x)|$.

Для того чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, предположим, что график функции $y = f(x)$ нам известен (либо он задан, либо умеем его строить).

Пусть, график функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 6.

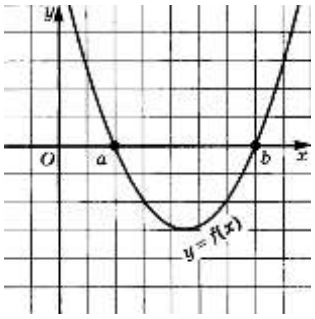

Рисунок 6

Функция $f(x) > 0$ на луче $(-\infty; a]$ и на луче $[b; +\infty)$. Следовательно, для данных двух промежутков выполняется равенство $|f(x)| = f(x)$. Следовательно,

график функции $y = |f(x)|$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$ на указанных промежутках.

Функция $f(x) < 0$ на интервале $(a; b)$. Но тогда $|f(x)| = -f(x)$, следовательно, на интервале $(a; b)$ необходимо построить график функции $y = -f(x)$, для этого соответствующую часть графика функции $y = f(x)$ отображают симметрично относительно оси OX.

График функции $y = |f(x)|$ изображён на рисунке 7.

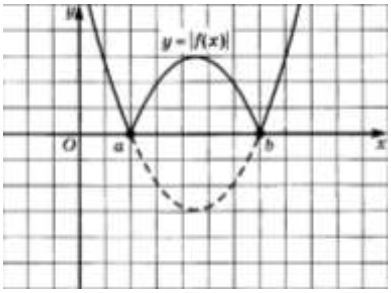

Рисунок 7

Алгоритм построения графика функции $y = |f(x)|$

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) оставить без изменения те части графика функции $y = f(x)$, которые лежат не ниже оси OX;

3) части графика функции $y = f(x)$, которые лежат ниже оси OX, заменить на симметричные им относительно оси OX.

Пример 1. Построить график функции вторым способом:

$$y = \left|\frac{2x-4}{x-3}\right|.$$

Решение:

Построим график дробно–линейной функции $y = \frac{2x-4}{x-3}$.

Имеем:

$$\frac{2x-4}{x-3} = \frac{(2x-6)+2}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2.$$

Следовательно, необходимо построить график функции $y = \frac{2}{x-3} + 2$.

Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(3; 2)$ (пунктирные прямые $x = 3$, $y = 2$ на рисунке 3) и «привяжем» к ней гиперболу $y = \frac{2}{x}$. График изображён на рисунке 13.

Воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения те части гиперболы, которые лежат не ниже оси OX, то есть на промежутках $(-\infty; 2]$ и $(3; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть гиперболы, которая лежит ниже оси OX, то есть на интервале $(3; 2)$. В результате получили требуемый график, представленный на рисунке 8.» ([7])

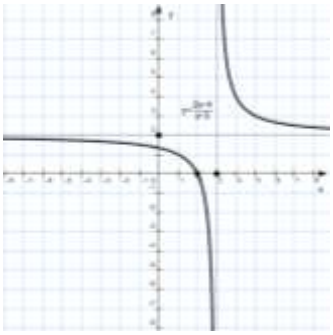

Рисунок 8

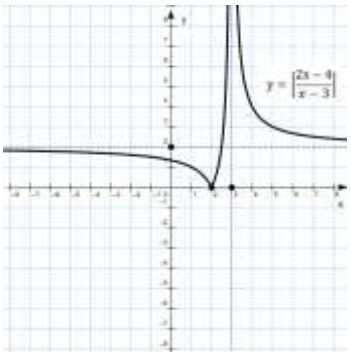

Рисунок 9

Пример 2. Постройте график функции двумя способами:

$$y = |x - 6|.$$

Решение:

1 способ:

$$y = |x - 6| \leftrightarrow \begin{bmatrix} y = x - 6, x \geq 6, \\ y = -x + 6, x < 6. \end{bmatrix}$$

Необходимо построить график линейной функции $y = x - 6$ при $x \geq 6$, и $y = -x + 6$ при $x < 6$. Полученный в результате график будет графиком функции $y = |x - 6|$.

2 способ:

Построим график линейной функции $y = x - 6$. С осью OX график пересекается в точке 6, а с осью OY в точке -6. График изображён на рисунке 10.

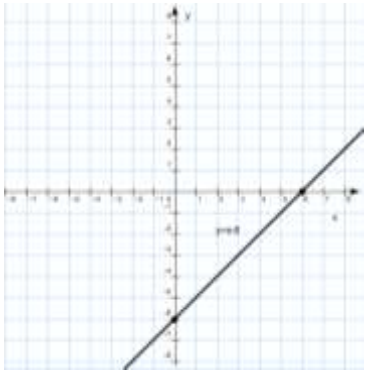

Рисунок 10

Воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть прямой, которая лежит не ниже оси OX, то есть на промежутке $[6; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть прямой, которая лежит ниже оси OX, то есть на интервале $(-\infty; 6)$. В результате получили требуемый график, представленный на рисунке 11.

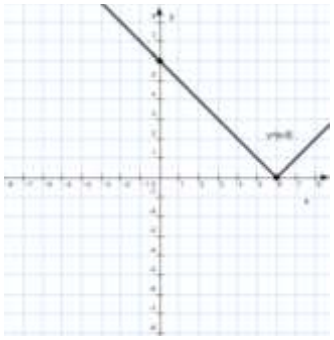

Рисунок 11

«Построение графика функции $y = f(|x|)$.

Для того чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, предположим, что график функции $y = f(x)$ нам известен (либо он задан, либо умеем его строить).

Пусть, график функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 12.

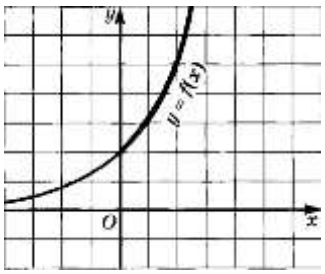

Рисунок 12

Если $x > 0$, то $|x| = x$, тогда $f(|x|) = f(x)$. Следовательно, при $x > 0$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ (эта часть графика выделена на рисунке 17). Так как $|x| = |-x|$ и соответственно $f(|x|) = f(|-x|)$, то есть, в точках с абсциссами X и $-X$ ординаты графика функции $y = f(|x|)$ равны, то есть данные точки симметричны относительно оси OY (рисунок 13).

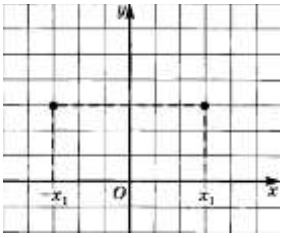

Рисунок 13

Следовательно, график обладает осевой симметрией относительно оси OY, поэтому к уже построенной его ветви при $x \geq 0$ необходимо добавить симметричную ей относительно оси OY. В результате получили требуемый график, представленный на рисунке 14.

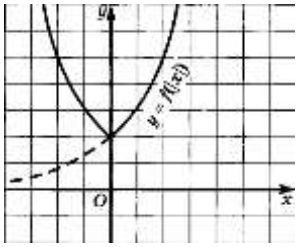

Рисунок 14

Алгоритм построения графика функции $y = f(|x|)$:

1) построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$;

2) добавить ветви, симметричные построенным относительно оси OY.

Пример 3. Построить график функции вторым способом:

$$y = \frac{2|x| - 4}{|x| - 3}.$$

Решение:

Аналогично примеру 1 необходимо построить график дробно–линейной функции $y = \frac{2x-4}{x-3}$, но возьмём только те части гиперболы, которые лежат в правой координатной полуплоскости, они выделены на рисунке 15.

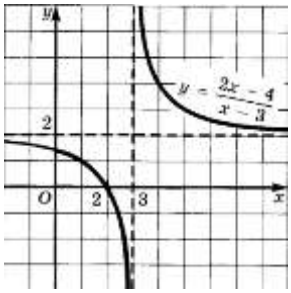

Рисунок 15

Добавим к ним их симметричные образы относительно оси OY. В итоге получим нужный график, представленный на рисунке 16.» ([7])

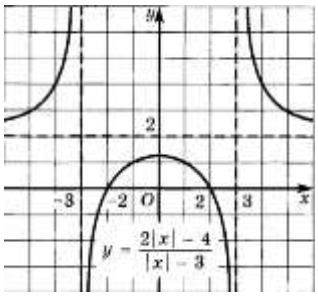

Рисунок 16

Пример 4. Построить график функции двумя способами:

$$y = |x| - 6.$$

Решение:

1 способ:

$$y = |x| - 6 \leftrightarrow \begin{cases} y = x - 6, x \geq 0, \\ y = -x - 6, x < 0. \end{cases}$$

Необходимо построить график линейной функции $y = x - 6$ при $x \geq 0$, и $y = -x - 6$ при $x < 0$. Полученный в результате график будет графиком функции $y = |x| - 6$.

2 способ:

Построим график линейной функции $y = x - 6$, но возьмём только ту часть прямой, которая лежит в правой координатной полуплоскости, она выделена на рисунке 17.

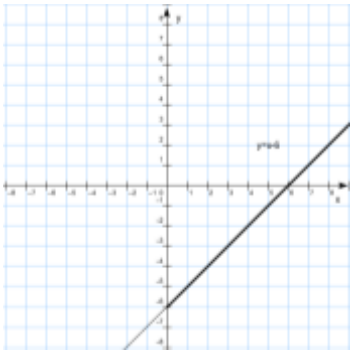

Рисунок 17

Добавим к ней симметричный образ относительно оси OY. В итоге получим нужный график, представленный на рисунке 18.

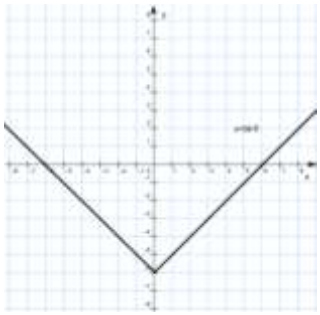

Рисунок 18

Построение графика функции $y = |f(|x|)|$.

Обобщая приведенные ранее рассуждения, можно предложить следующий алгоритм.

Алгоритм построения графика функции $y = |f(|x|)|$:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) построить график функции $y = f(|x|)$, отображением симметрично оси OY, при $x \geq 0$;

3) построить график $y = |f(|x|)|$, полученный из графика функции $y = f(|x|)$, отображением симметрично оси OX нижней части графика.

Пример 5. Построить график функции вторым способом:

$$y = |x^2 - 6|x| - 7|.$$

Решение:

Построим график функции $y = x^2 - 6x - 7$, но возьмём только ту часть параболы, которая лежит в правой координатной полуплоскости, она выделена на рисунке 19.

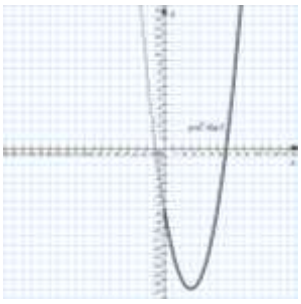

Рисунок 19

Добавим к ней симметричный образ относительно оси OY. В итоге получим график функции $y = f(|x|)$, то есть $y = x^2 - 6|x| - 7$ он представлен на рисунке 20.

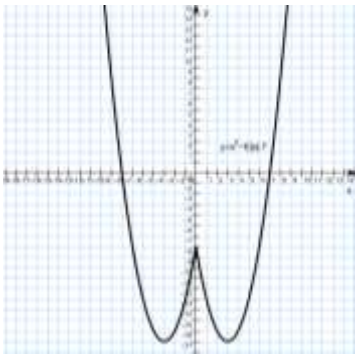

Рисунок 20

Теперь воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть, которая лежит не ниже оси OX, то есть на промежутке $(-\infty; -8] \cup [7; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть параболы, которая лежит ниже оси OX, то есть на интервале $(-8; 7)$. В итоге получили нужный график, представленный на рисунке 21.

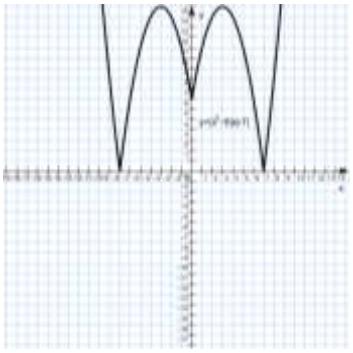

Рисунок 21

3 Решение задач.

Пример 6. Постройте график функции вторым способом:

$$y = |x^2 - x - 6|.$$

Решение:

Построим график квадратичной функции $y = x^2 - x - 6$. Парабола возрастает, так как $a = 1$, $(a = 1)$. Найдем точки пересечения с осями координат. С осью OX график пересекается в точках -2 и 3, с осью OY в точке с координатой -6. График параболы изображён на рисунке 22.

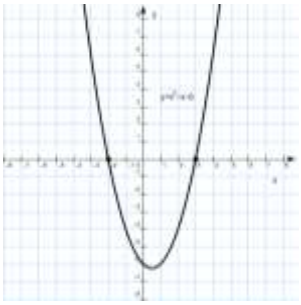

Рисунок 22

Воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть параболы, которая лежит не ниже оси OX, то есть на промежутке $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть параболы, которая лежит ниже оси OX, то есть на интервале $(-2; 3)$. В итоге получили требуемый график, представленный на рисунке 23.

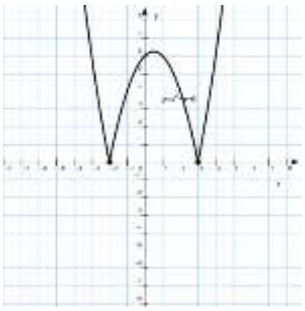

Рисунок 23

4 Упражнение для самостоятельной работы.

Пример 7. Построить график функции, решить вторым способом:

$$y = x^2 - |x| - 6.$$

Решение:

Представлено в приложении Ж.

5 Домашнее задание.

Пример 8. Построить график функции, решить вторым:

$$y = \big||x| - 3\big|.$$

Решение:

Построим график линейной функции $y = x - 3$, но возьмём только ту часть прямой, которая лежит в правой координатной полуплоскости, она выделена на рисунке 24.

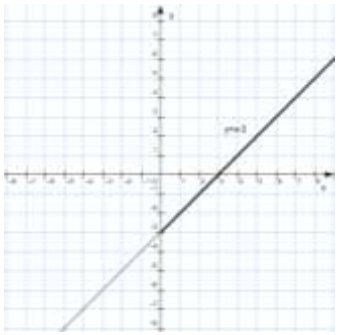

Рисунок 24

Добавим к ней симметричный образ относительно оси OY. В итоге получим график функции $y = f(|x|)$, то есть $y = |x| - 3$, представленный на рисунке 25.

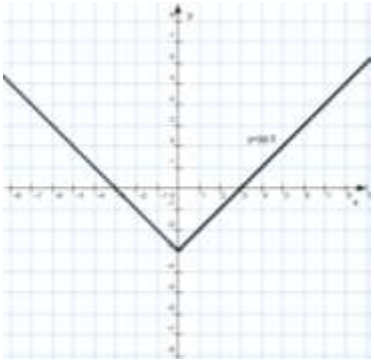

Рисунок 25

Теперь, воспользовавшись алгоритмом, построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть прямой, которая лежит не ниже оси OX, то есть на промежутке $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть прямой, которая лежит ниже оси OX, то есть на интервале $(-3; 3)$. В итоге получили нужный график, представленный на рисунке 26.

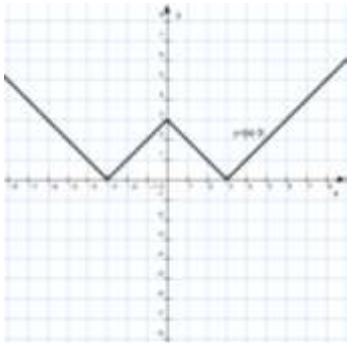

Рисунок 26

2. 4. 8 Занятие 9–10. Построение графиков функции вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$, и графиков неявно заданных функций

Цели:

1 Познакомить учащихся с построением графиков функции вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$ и графиков неявно заданных функций.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (5 минут)

2 Алгоритм построения графиков вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$. Пример. (10 минут)

3 Алгоритм построения графиков вида $|y| = f(x)$. Пример. (12 минут)

4 Алгоритм построения графика функции $|y| = |f(x)|$. Пример. (13 минут)

5 Построение графиков неявно заданных функций. Пример. (10 минут)

6 Решение задач. (25 минут)

7 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

8 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Алгоритм построение графиков вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$. Пример.

При построении графиков функции данного вида наиболее распространенным методом является раскрытие модуля по определению.

Алгоритм построения графиков вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$:

1) найти область допустимых значений и разбить её на множества, при помощи нулей подмодульных выражений, в каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют свой знак;

2) на каждом таком множестве функцию записывают без знака модуля и строят график. Объединением множества решений, которые были найдены на всех частях области допустимых значений данной функции, будут являться графиком функции.

Замечание:

Если каждое выражение, стоящее под знаком модуля, имеет вид $kx + b$, где $k \neq 0$, то для того чтобы построить график такого вида, можно использовать метод вершин.

Метод вершин:

1) найти нули каждого подмодульного выражения: $x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n$;

2) составить таблицу (таблица 13), в которой кроме найденных значений записывают по одному целому справа и слева от этих значений, и найти соответствующие значения функции; ([11])

Таблица 13 – Метод вершин для функции $y = (x)$

x	a	x_1	x_2	...	x_n	b
y						

3) нанести эти точки на координатную плоскость и соединить последовательно.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Построить график функции:

$$y = |2x^2 - 4| + |x - 1|.$$

Область допустимых значений:

Все действительные числа.

Решение:

1) нули подмодульных выражений: $x_1 = -\sqrt{2};\ \ x_2 = \sqrt{2};\ \ x_3 = 1$. Они разбивают числовую ось на четыре промежутка $(-\infty;-2)$, $[-2;1)$, $[1;2), [2;+\infty)$;

2) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 14:

Таблица 14

	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$[-\sqrt{2};1)$	$[1;\sqrt{2})$	$[\sqrt{2};+\infty)$
$\lvert 2x^2-4\rvert$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-$	$-$	$+$	$+$

3) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ y = -(2x^2-4) - (x-1); \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ y = -(2x^2-4) - (x-1); \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ y = -(2x^2-4) + x - 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ y = 2x^2 - 4 + x - 1. \end{cases} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ y = -2x^2 - x + 5; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ y = -2x^2 - x + 5; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ y = -2x^2 + x + 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ y = 2x^2 + x - 5. \end{cases} \end{cases}$$

Получили для каждого промежутка соответствующую функцию. Тогда, искомый график функции изображен на рисунке 27.

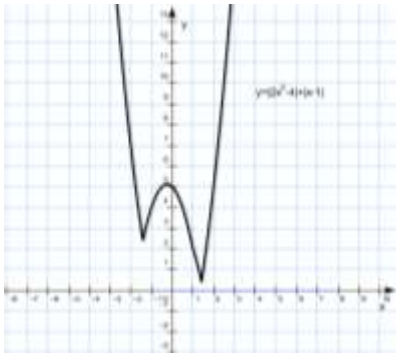

Рисунок 27

3 Алгоритм построение графиков вида $|y| = f(x)$. Пример.

Так как $|y| = f(x)$, возможно лишь в том случае когда $f(x) \ge 0$, тогда по определению модуля следует:

$$|y| = \begin{cases} y, \text{если } y \geq 0, \\ -y, \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Алгоритм построения данного графиков вида $|y| = f(x)$:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) для тех x из области определения, при которых $f(x) \geq 0$, и отразить полученную часть графика симметрично относительно оси абсцисс.

Пример 2. ([11]) Построить график функции, при $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$|y| = \sin x.$$

Решение:

$$|y| = \begin{cases} \sin x\,, \text{если } y \geq 0, \\ -\sin x\,, \text{если } y < 0. \end{cases}$$

1) строим график функции $y = \sin x$, рисунок 28;

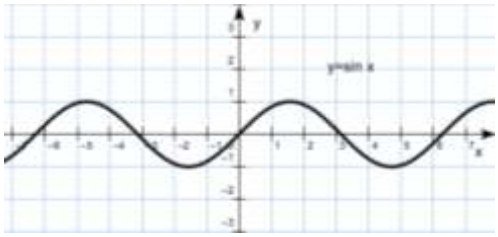

Рисунок 28

2) отражаем ту часть графика, которая находится выше оси абсцисс симметрично относительно оси абсцисс. В результате получим искомый график функции $|y| = \sin x$, изображенный на рисунке 29.

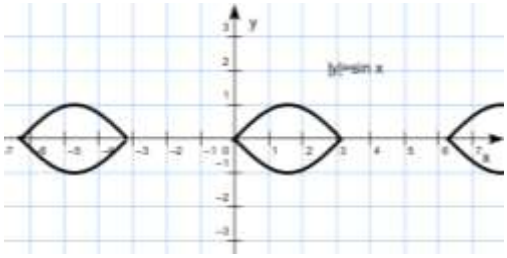

Рисунок 29

4 Алгоритм построения графика функции $|y| = |f(x)|$. Пример.

Алгоритм построения графиков вида $|y| = |f(x)|$:

«Для построения графика вида $|y| = |f(x)|$ достаточно построить график $y = f(x)$, а затем к построенному графику добавить симметричный относительно оси OX.» ([11])

Пример 3. Построить график функции:

$$|y| = |x|.$$

Область допустимых значений:

Все действительные числа.

Решение:

Построим график линейной функции $y = x$, а затем к построенному графику добавим симметричный относительно оси OX, график изображен на рисунке 30.

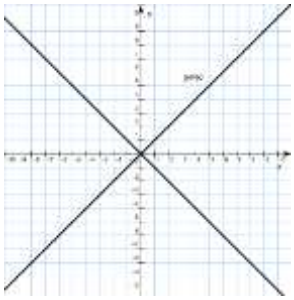

Рисунок 30

5 Построение графиков неявно заданных функций. Пример.

Для того чтобы построить график функций $F(|x|; y) = 0$, $F(x; |y|) = 0$, $F(|x|; |y|) = 0$, необходимо построить график функции $F(x; y) = 0$ и далее использовать алгоритмы для построения графиков вида $y = f(|x|)$, $|y| = f(x)$,$|y| = |f(x)|$ соответственно. ([11])

Пример 4. Построить график функции:

$$y = |x^2 + 5x - 6| + |x - 4|.$$

Область допустимых значений:

Все действительные числа.

Решение:

1) область допустимых значений все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1 = -6$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$. Они разбивают числовую ось на четыре промежутка $(-\infty; -6)$, $[-6; 1)$, $[1; 4)$, $[4; +\infty)$;

2) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице 15:

Таблица 15

	$(-\infty;-6)$	$[-6;1)$	$[1;4)$	$[4;+\infty)$
$\lvert x^2+5x-6\rvert$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\lvert x-4\rvert$	$-$	$-$	$-$	$+$

3) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} \begin{cases} x<-6, \\ y=x^2+5x-6-(x-4); \end{cases} \\ \begin{cases} -6\le x<1, \\ y=-(x^2+5x-6)-(x-4); \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x<4, \\ y=x^2+5x-6-(x-4); \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ y=x^2+5x-6+x-4. \end{cases} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x<-6, \\ y=x^2+4x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} -6\le x<1, \\ y=-x^2-6x+10; \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x<4, \\ y=x^2+4x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ y=x^2+6x-10. \end{cases} \end{cases}$$

Получили для каждого промежутка соответствующую функцию. Тогда, искомый график функции изображен на рисунке 31.

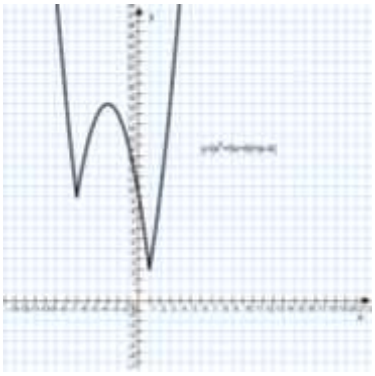

Рисунок 31

Пример 5. Построить график функции:

$$|y-1|=|x^2-2|.$$

Область допустимых значений:

Все действительные числа.

Решение:

Для построения достаточно построить график функции $y = x^2 - 1$, а затем к построенному графику добавить симметричный относительно оси OX, график изображен на рисунке 32. ([11])

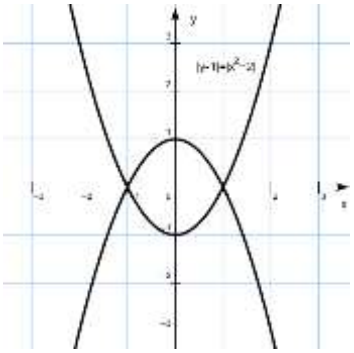

Рисунок 32

6 Решение задач.

Пример 6. Построить график функции:

$$y = |x + 2| + |x + 1| + |x - 7|.$$

Область допустимых значений:

Все действительные числа.

Решение:

1) нули подмодульных выражений: $x_1 = -2; x_2 = -1; x_3 = 7;$

2) составим таблицу и найдем соответствующие значение функции. Они представлены в таблице 16:

Таблица 16

x	-3	-2	-1	7	8
y	13	10	9	17	20

3) соединим получившиеся точки, тогда искомый график функции изображен на рисунке 33.

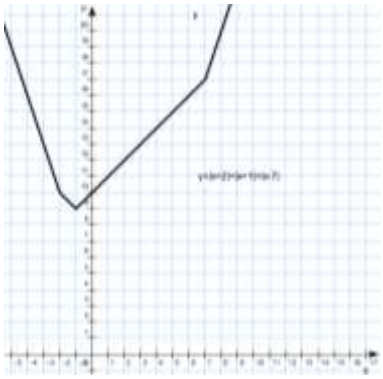

Рисунок 33

Пример 7. Построить график функции:

$$|y - 6| = 2x^2 + 6.$$

Решение:

Воспользуемся первым способом.

По определению модуля числа имеем:

$$\begin{cases} \begin{cases} y \geq 0, \\ y - 6 = 2x^2 + 6; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0, \\ y - 6 = -(2x^2 + 6). \end{cases} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 0, \\ y = 2x^2 + 12; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0, \\ y = -2x^2. \end{cases} \end{cases}$$

Сначала необходимо построить параболу $y = 2x^2 + 12$ при $y \geq 0$, и $y = -2x^2$ при $y < 0$. Результатом будет являться график функции $|y - 6| = 2x^2 - 6$, изображенный на рисунке 34.

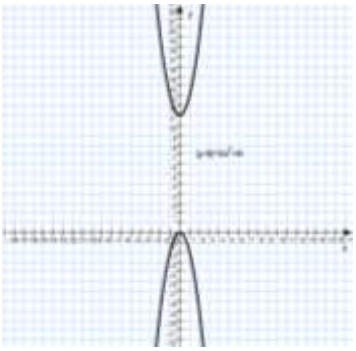

Рисунок 34

7 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 8. Построить график функции:

$$|y| = |x^2 + 6|.$$

Решение:

Представлено в приложении И.

8. Домашнее задание.

Пример 9. Построить график функции, двумя способами:

$$|y| = x^3 - 1$$

Решение:

1 способ:

$$|y| = \begin{cases} x^3 - 1, \text{если } y \geq 0, \\ -x^3 + 1, \text{если } y < 0. \end{cases}$$

То есть, необходимо построить гиперболу $y = x^3 - 1$ при $y \geq 0$, и $y = -x^3 + 1$ при $y < 0$. Результатом будет являться график функции $|y| = x^3 - 1$.

2 способ:

1) строим график функции $y = x^3 - 1$, он изображен на рисунке 35;

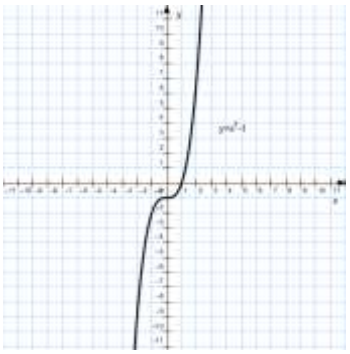

Рисунок 35

2) отражаем ту часть графика, которая находится выше оси абсцисс симметрично относительно оси абсцисс. В результате получили искомый график функции $|y| = x^3 - 1$, изображенный на рисунке 36.

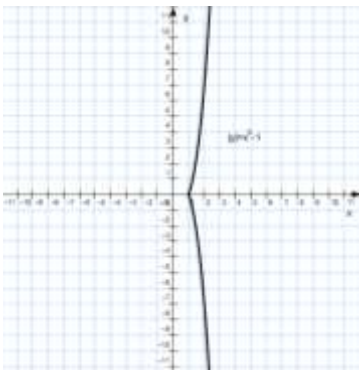

Рисунок 36

2. 4. 9 Занятие 11. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом

Цели:

1 Познакомить учащихся с решением уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (3 минуты)

2 Объяснение материала. Пример. (4 минуты)

3 Решение задач. (23 минуты)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (15 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Объяснение материала. Пример.

Решать уравнения и неравенства с модулем можно двумя способами. Первым является алгебраический метод, а вторым является графический. Графический метод решения уравнения и неравенства, содержащих переменную под знаком модуля, является наиболее удобным и доступным для учащихся, так как его решение кратко и наглядно.

В случае, если в задании необходимо найти количество корней, либо их приближенное значение, используют графический способ. Также используются графики и при решении уравнений, которые, кроме модулей, содержат и параметр. ([11])

Рассмотрим для сравнения пример.

Пример 1. Решить уравнение различными способами:

$$|2x - 8| = |x + 1|.$$

Решение:

1 способ - стандартный алгоритм:

Тогда данное уравнение будет равносильно совокупности:

$$\begin{bmatrix} 2x - 8 = x + 1, \\ 2x - 8 = -(x + 1). \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 9, \\ x = \frac{7}{3}. \end{bmatrix}$$

То есть, решением нашего уравнения являются числа 9 и $\frac{7}{3}$.

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{7}{3}$.

2 способ - метод возведения в квадрат:

Возведем обе части уравнении в квадрат, получим:

$$(|2x-8|)^2 = (|x+1|)^2,$$

$$(|2x-8|)^2 - (|x+1|)^2 = 0,$$

$$(4x^2 - 32x + 64) - (x^2 + 2x + 1) = 0,$$

$$3x^2 - 34x + 63 = 0.$$

Решением квадратного уравнения и данного являются числа 9 и $\frac{7}{3}$

Ответ: x_1 =9; $x_2 = \frac{7}{3}$.

3 способ - графическое решение:

Построим графики левой и правой частей уравнения, а также найдем их точки пересечения. Они изображены на рисунке 37.

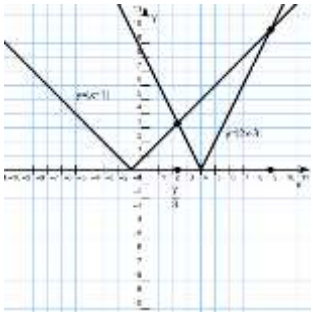

Рисунок 37

Ответ: x_1 =9; $x_2 = \frac{7}{3}$.

4 способ - метод вершин:

Преобразуем выражение, получим:

$$|2x-8| - |x+1| = 0.$$

Построим график функции $y = |2x-8| - |x+1|$.

1) нули подмодульных выражений: $x_1 = 4$; $x_2 = -1$;

2) составим таблицу и найдем соответствующие значение функции (таблица 17):

Таблица 17

x	-2	-1	4	5
y	11	10	-5	-4

3) соединим получившиеся точки, тогда искомый график функции изображен на рисунке 38.

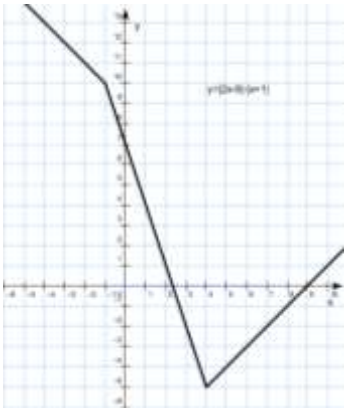

Рисунок 38

Решаем уравнение при $y = 0$, получаем $x_1 = 9$; $x_2 = \frac{7}{3}$

Ответ: $x_1 = 9$; $x_2 = \frac{7}{3}$.

Из данного примера видно, что графический способ решения намного легче и быстрее.

Рассмотрим примеры на решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом.

3 Решение задач.

Пример 2. Решите уравнение:

$$|x - 1| - |x - 7| + 2x - |x| = 0.$$

Решение:

Построим график функции $y = |x - 1| - |x - 7| - |x|$, воспользовавшись методом вершин.

1) нули подмодульных выражений: $x_1 = 1$; $x_2 = 7$; $x_3 = 0$;

2) составим таблицу и найдем соответствующие значение функции (таблица 18):

Таблица 18

x	-1	0	1	7	8
y	-7	-6	-7	-1	-2

3) соединим получившиеся точки, тогда искомый график функции изображен на рисунке 39.

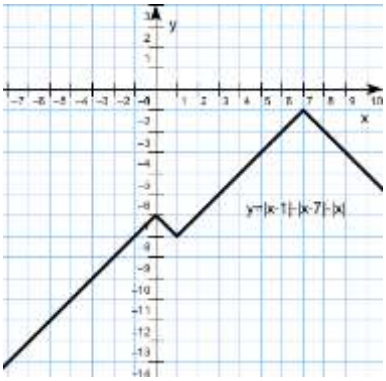

Рисунок 39

При $y = 0$ график функции не пересекает ось абсцисс, следовательно, уравнение не имеет решения.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\big||x| - 7\big| = 4.$$

Решение:

Сначала построим график функции $y = |x| - 7$, пользуясь алгоритмом для построения графика функции $y = f(|x|)$. То есть сначала построим график линейной $y = x - 7$, при $x \geq 0$, и отобразим симметрично оси ординат. График изображен на рисунке 40.

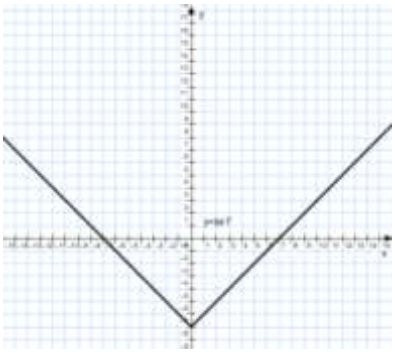

Рисунок 40

Далее, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = |f(x)|$, строим график функции $y = \big||x| - 7\big|$, то есть отобразим симметрично оси OX нижнюю часть графика, при $y < 0$. График изображен на рисунке 41.

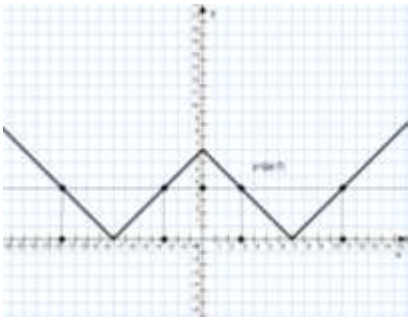

Рисунок 41

По графику находим точки абсцисс, при которых $y = 4$, это точки с координатами $-11, -3, 3, 11$. Эти числа и являются решением уравнения

$$\big||x| - 7\big| = 4.$$

Ответ: $x_1 = -11, x_2 = -3, x_3 = 3, x_4 = 11$.

Замечание. Пример 1 легко решается любым из четырех способов, но если решать пример 2 раскрытием модулей на каждом из промежутков, определяемых нулями подмодульных выражений, и пример 3 путем раскрытия двойного модуля, достаточно громоздко. При графическом решении данных уравнений ответ получается намного быстрее.

Пример 4. Сколько корней имеет уравнение:

$$\left|\left|\frac{x^3}{8}\right| - 1\right| = 1.$$

Решение:

Сначала построим график функции $y = \left|\frac{x^3}{8}\right| - 1$, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = f(|x|)$. То есть сначала построим график $y = \frac{x^3}{8} - 1$, при $x \geq 0$, и отобразим симметрично оси ординат. График изображен на рисунке 42.

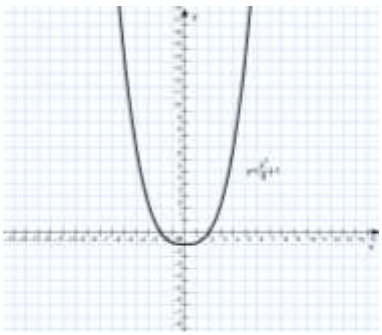

Рисунок 42

Далее, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = |f(x)|$, строим график функции $y = \left|\left|\frac{x^3}{8}\right| - 1\right|$, то есть отобразим симметрично оси OX нижнюю часть графика, при $y < 0$. График изображен на рисунке 43.

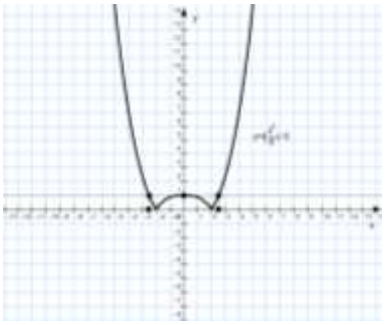

Рисунок 43

По графику находим точки абсцисс, при которых $y = 1$, это точки с координатами $-2{,}5;\ 0;\ 2,5$. Эти числа и являются решением уравнения $\left|\left|\frac{x^3}{8}\right| - 1\right| = 1$.

Ответ: три корня.

4. Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 5. Решить неравенство:

$$2 + 3|x| \leq -x - 6.$$

Решение:

Представлено в приложении К.

Пример 6. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4 + 5|x| \leq 9; \\ |6 - x| < 14. \end{cases}$$

Решение:

Представлено в приложении К.

5. Домашнее задание.

Пример 7. Решить неравенство:

$$x < |6 + x|.$$

Решение:

Построим график функции $y = |6 + x|$, для этого, согласно алгоритму для построения графика функции $y = |f(x)|$, оставим без изменения ту часть графика функции $y = 6 + x$, которая лежит не ниже оси OX. Часть графика функции $y = 6 + x$, которая лежит ниже оси OX, заменим на симметричные ей относительно оси OX. Построим график функции $y = x$. Графики изображены на рисунке 44.

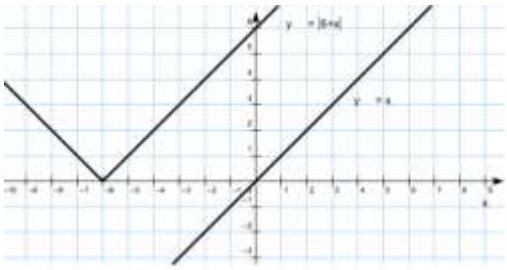

Рисунок 44

По рисунку видно, что графики функций не имеют общих точек, следовательно, $x \in \emptyset$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 7. Решить неравенство:

$$\left|6 - \frac{5}{|x|}\right| \leq 4.$$

Решение:

Областью определения функции все действительные числа, кроме $x = 0$.

Построим график функции $y = \left|6 - \frac{5}{|x|}\right|$. Для этого построим график функции $y = 6 - \frac{5}{|x|}$, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = f(|x|)$. То есть сначала построим график $y = 6 - \frac{5}{x}$, при $x \geq 0$, и отобразим симметрично оси ординат. График изображен на рисунке 45.

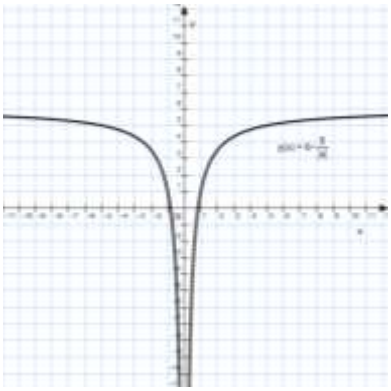

Рисунок 45

Далее, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = |f(x)|$, строим график функции $y = \left|6 - \frac{5}{|x|}\right|$, то есть отобразим симметрично оси OX нижнюю часть графика, при $y < 0$. График изображен на рисунке 46.

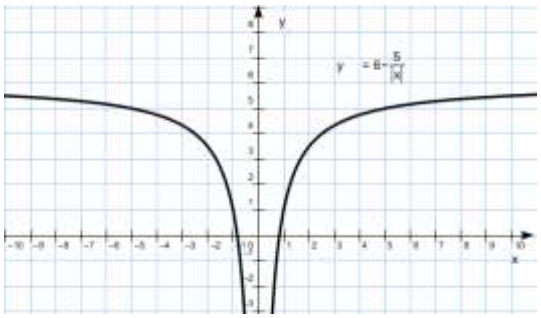

Рисунок 46

Строим прямую $y = 4$. Найдем точки пересечения графика $y = \left|6 - \frac{5}{|x|}\right|$ и $y = 4$. Точек пересечения четыре. Так как $y = \left|6 - \frac{5}{|x|}\right|$ – четная, то достаточно решить два уравнения.

Первое уравнение:

$$6 - \frac{5}{x} = -4,$$

$$x = 0{,}5.$$

Второе уравнение:

$$6 + \frac{5}{x} = 4,$$

$$x = 2{,}5.$$

Тогда $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 2{,}5$ и $x_4 = -2{,}5$. Следовательно, решением данного неравенства является $x \in [-2{,}5; -0{,}5] \cup [0{,}5; 2{,}5]$. Графики функций изображены на рисунке 47.

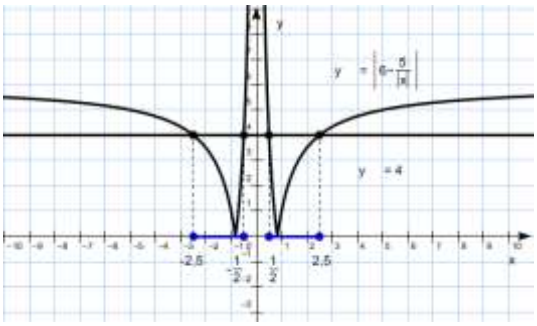

Рисунок 47

Ответ. $x \in [-2{,}5; -0{,}5] \cup [0{,}5; 2{,}5]$.

2. 4. 10 Занятие 12. Решение уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих модуль, графическим способом

Цели:

1 Познакомить учащихся с решением уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих модуль, графическим способом.

2 Закрепить изученный материал при помощи решения задач.

План занятия.

1 Проверка домашнего задания. (3 минуты)

2 Метод областей. Примеры. (5 минут)

3 Решение задач. (15 минут)

4 Упражнения для самостоятельной работы. (17 минут)

5 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Проверка домашнего задания.

2 Метод областей. Примеры.

Решением уравнения с двумя переменными является множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию. Поэтому ответом к ним является изображение решения на координатной плоскости.

При решении уравнений и неравенств, а также и их систем можно использовать метод областей.

Метод областей:

1) найти нули подмодульных выражений;

2) разбить координатную плоскость OXY на области, в каждой из которых все подмодульные выражения сохраняют постоянный знак;

3) решить уравнение, неравенство, систему в каждой из таких областей;

4) объединить полученные решения.

Объединение полученных решений и будет ответом.

Замечание. Для определения знака выражений, стоящих под модулем, выбирают точку из каждой области и подставляют ее координаты в данные выражения. ([11])

Пример 1. Изобразить в координатной плоскости OXY множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|x| + |y| = 7.$$

Решение:

Первоначально построим прямую, заданную уравнением $x + y = 7$. График изображен на рисунке 48.

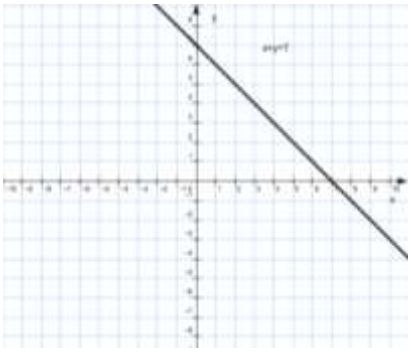

Рисунок 48

Так как множество точек с координатами $(x; y) \to (|x|; |y|)$, то ту часть прямой, которая расположена в первой четверти, оставляем без изменений и симметрично отображаем её относительно оси OX и OY, а также начала координат. График изображен на рисунке 50.

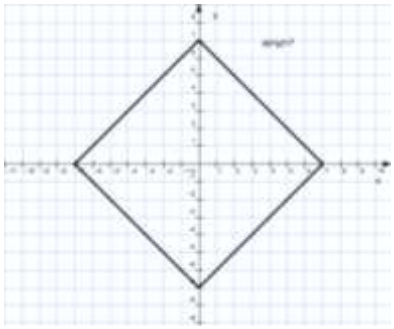

Рисунок 50

Следовательно, ответом уравнения будет являться множество точек, принадлежащие квадрату с вершинами $(7;0), (0;7), (-7;0), (0;-7)$.

Ответ: множество точек, принадлежащие квадрату с вершинами $(7;0), (0;7), (-7;0), (0;-7)$.

Замечание. При решении неравенств вида $\mathcal{F}(x;y) \geq 0$ или $\mathcal{F}(x;y) < 0$ строят график функции вида $\mathcal{F}(x;y) = 0$, тогда плоскость $\mathcal{OXY}$ будет разбита графиком функции на несколько частей. Далее выбирается по каждой точки из части и проверяется выполнение уравнения на каждой из областей.

Пример 2. Изобразить в координатной плоскости $\mathcal{OXY}$ множество точек, удовлетворяющих условию:

$$(|x| + 1)^2 + (|y| - 3)^2 = 4.$$

Решение:

Рассмотрим функцию $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, графиком данной функции является окружность с центром в точке $(-1; 3)$ и радиусом 2.

Так как множество точек с координатами $(x;y) \to (|x|;|y|)$, то построим окружность, с уравнением $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, в первой четверти, и симметрично отобразим ее относительно оси $\mathcal{OX}$ и $\mathcal{OY}$, а также начала координат. В итоге получим множество точек удовлетворяющих данному условию, изображенный на рисунке 51.

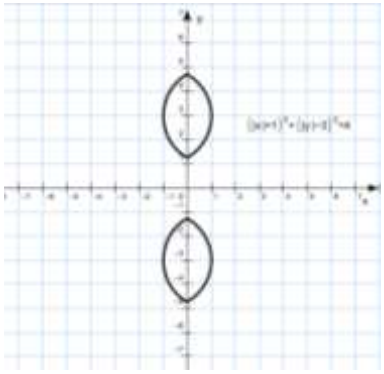

Рисунок 51

Данная фигура и является решением уравнения.

3 Решение задач.

Пример 3. Изобразить в координатной плоскости OXY множество точек, удовлетворяющих условию:

$$|2x + y| + |x + 2y| = 3.$$

Решение:

Выражение $2x + y$ обращаются в ноль на прямой $y = 2x$, а $x + 2y$ на $y = \frac{x}{2}$, соответственно. Данные прямые делят плоскость OXY на 4 части, изобразим их и пронумеруем (рисунок 52).

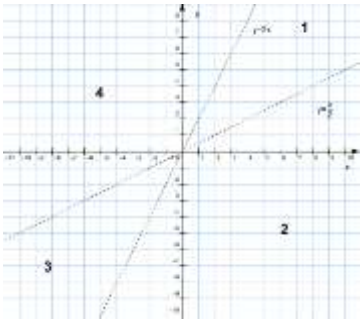

Рисунок 52

Для того чтобы построить график искомой функции $|2x + y| + |x + 2y| = 3$, рассмотрим, как раскрываются подмодульные выражения на каждой части.

Рассмотрим уравнение на первой части. Возьмем точку с координатой $(2; 2)$, тогда $2x + y > 0$ и $x + 2y > 0$, тогда, уравнение примет вид:

$$2x + y + x + 2y = 3,$$

$$3x + 3y = 3,$$

$$x + y = 1.$$

Рассмотрим уравнение на второй части. Возьмем точку с координатой $(2;-2)$, тогда $2x+y>0$ и $x+2y<0$, тогда, уравнение примет вид:

$$2x+y-(x+2y)=3,$$

$$x-y=3.$$

Рассмотрим уравнение на третьей части. Возьмем точку с координатой $(-2;-2)$, тогда $2x+y<0$ и $x+2y<0$, тогда, уравнение примет вид:

$$-(2x+y)-(x+2y)=3,$$

$$-3x-3y=3,$$

$$x+y=-1.$$

Рассмотрим уравнение на четвертой части. Возьмем точку с координатой $(-2;2)$, тогда $2x+y<0$ и $x+2y>0$, тогда, уравнение примет вид:

$$-(2x+y)+x+2y=3,$$

$$-x+y=3.$$

Объединяя эти результаты, строя полученные прямые для каждой части, получим множество точек удовлетворяющих данному условию, что $|2x+y|+|x+2y|=3$, изображенный на рисунке 53.

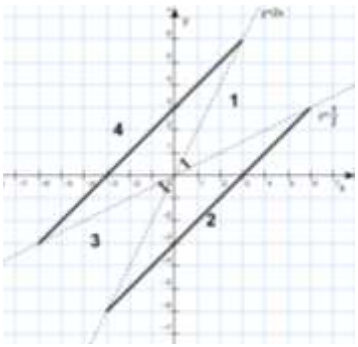

Рисунок 53

Пример 4. Решить неравенство:

$$(|x|+1)^2+(|y|-3)^2\leq 4.$$

Решение:

Множество точек, удовлетворяющих уравнению $(|x|+1)^2+(|y|-3)^2=4$, было найдено в примере 2.

Тогда фигура разбивает плоскость на 3 части. Возьмем точку в первой части с координатой $(1;1)$. В данной точке неравенство не выполняется. Возьмем точку

во второй части с координатой $(0;2)$. В данной точке неравенство выполняется. Возьмем точку в третьей части с координатой $(0;-2)$. В данной точке неравенство не выполняется.

Следовательно, так как наше неравенство не строгое, то решением неравенства $(|x|+1)^2+(|y|-3)^2 \leq 4$ будет являться вторая часть с её границей. График изображен на рисунке 54.

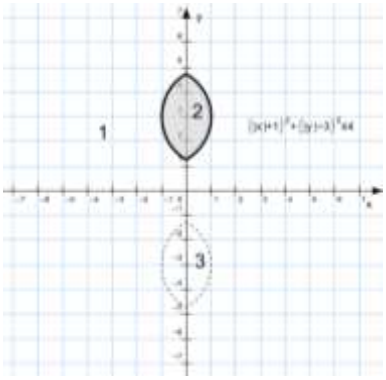

Рисунок 54

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 5. Решить неравенство:

$$y < 9|x| - 5.$$

Решение:

Представлено в приложении Л.

Пример 6. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |2x - y| \leq 2, \\ |3x + y| \leq 3. \end{cases}$$

Решение:

Представлено в приложении Л.

5 Домашнее задание.

Пример 7. Решить неравенство:

$$y < |9|x| - 5|.$$

Решение:

Построим график функции $y < |9|x| - 5|$, согласно алгоритму для построения графика функции вида $y = |f(|x|)|$. Построим сначала график

функции $y = 9x - 5$, но возьмём только ту часть прямой, которая лежит в правой координатной полуплоскости, она выделена на рисунке 55.

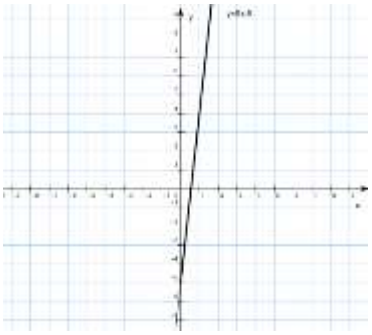

Рисунок 55

Добавим к ней симметричный образ относительно оси OY. В итоге получим график функции $y = f(|x|)$, то есть $y = 9|x| - 5$, он представлен на рисунке 56.

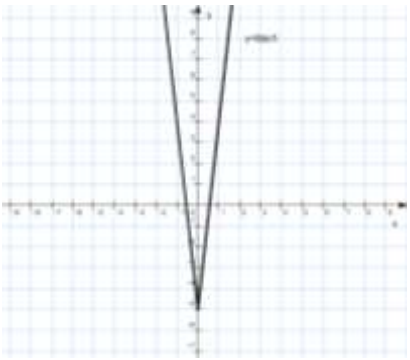

Рисунок 56

Теперь, воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть, которая лежит не ниже оси OX, то есть на промежутке $(-\infty; -0{,}5] \cup [0{,}5; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть, которая лежит ниже оси OX, то есть на интервале $(-0{,}5; 0{,}5)$. В итоге получили нужный график, представленный на рисунке 57.

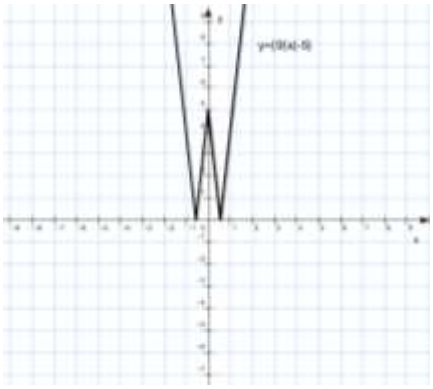

Рисунок 57

График разбивает плоскость OXY на две части. Возьмем точку в первой части с координатой $(0;0)$. В данной точке неравенство не выполняется. Возьмем точку во второй части с координатой $(0;7)$. В данной точке неравенство $y < |9|x| - 5|$ выполняется. Так как неравенство строгое, то графики функций не будут входить в решение данного неравенства. Решение данного неравенства изображено на рисунке 58.

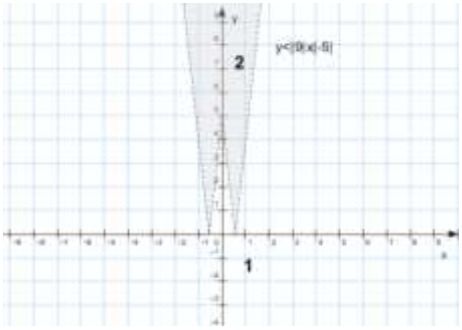

Рисунок 58

Пример 8. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |x - y| < 4, \\ |x + y| < 4. \end{cases}$$

Решение:

По определению модуля следует:

$$\begin{cases} -4 < x - y < 4, \\ -4 < x + y < 4. \end{cases}$$

Выразим y, получим:

$$\begin{cases} -4 - x < y < 4 - x, \\ -4 + x < y < 4 + x. \end{cases}$$

Тогда построим прямые $y = -x - 4;\ y = -x + 4;\ y = x - 4;\ y = x + 4$. Они разобьют плоскость OXY на шесть частей.

Изобразим множество точек в плоскость OXY, удовлетворяющих последней системе двойных неравенств. Решением являются все точки внутри и на границе прямоугольника. Возьмем точку в первой части с координатой $(0;0)$. В данной точке неравенство выполняется. Так как неравенство строгое, то границы первой части не будет входить в решение данного неравенства. Решение данного неравенства изображено на рисунке 59.

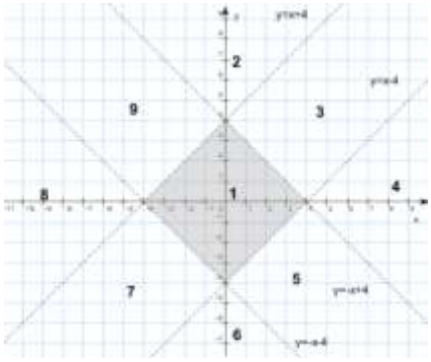

Рисунок 59

2. 4. 11 Занятие 13. Урок контроля знаний, умений и навыков учащихся по изученному курсу «Модуль»

Целью данной контрольной работы является закрепление, систематизация, выработка умений в применении знаний при решении конкретных задач, расширение как теоретических, так и практических знаний по теме «Модуль действительного числа».

Задачи контрольной работы:

1 Развитие навыков самостоятельности.

2 Владение методами и приемами для получения, формулирования выводов и принятия решений.

3 Развитие умения логично, грамотно, строить свои рассуждения, выполнять расчеты и строить графики.

Задание 1 и 2 направлены на отработку учащимися в понимании и осознании определения модуля действительного числа, как и все задания, но задание 2, также направлено и на умение использовать свойства модуля. В задание 3, предлагается решить уравнения методом интервалов, задание 4 – решить неравенство графическим способом. В заданиях 5 и 6 представлены задачи, являющиеся общими для обоих вариантов. В задании 5 предлагается изобразить в координатной плоскости oxy множество точек, удовлетворяющих условию, а задании 6 – решить систему неравенств с двумя переменными. (Таблица 19)

Критерий оценивания. Каждое задание оценивается в 1 балл. Количество заданий, выполненных на 5 – 6 баллов, на 4 – 5 баллов, на 3 составляет 4-3 балла, на 2 менее 3 баллов.

Время на выполнение работы составляет 45 минут.

Таблица 19 – Задания для урока контроля знаний, умений и навыков учащихся по изученному курсу «Модуль числа»

1 вариант	2 вариант
Задание 1. Раскройте модуль:	
$\left\|7\sqrt[4]{16}-4\pi\right\|$.	$\left\|4\frac{2}{3}\pi-\sqrt{21\frac{7}{9}}\right\|$.
Задание 2. Упростите выражение:	
1) $\sqrt{(2x-6)^2}$, если $x-3\geq 0$.	1) $\sqrt{(2x-6)^2}$, если $x-3<0$.
Задание 3. Решите уравнения методом интервалов:	
$\|x\|+\|x^2-1\|=4$.	$\|x-6\|+x=7$.
Задание 4. Решите неравенство графическим способом:	
$\|8+4x\|\leq 3x-4$.	$\|1-x\|\leq x+5$.
Общие задания.	
Задание 5. Изобразить в координатной плоскости OXY множество точек удовлетворяющих условию:	
$(\|x\|+1)^2+(\|y\|-4)^2=9$.	$(\|x\|-1)^2+(\|y\|-3)^2=9$.
Задание 6. Решите систему неравенств:	
$\begin{cases}\|x-y\|\geq 2,\\ \|x+y\|\geq 3.\end{cases}$	

Решение:

Представлено в приложении М.

2. 4. 12 Занятие 14. Модуль в заданиях единого государственного экзамена

Цели:

1 Познакомить и научить учащихся решать задания в ЕГЭ по математике, профильного уровня, связанных с модулем.

План занятия.

1 Решение задач. (37 минут)

2 Упражнение для самостоятельной работы. (7 минут)

3 Домашнее задание.

Ход занятия.

1 Решение задач.

Пример 1. ([15]) Найти все значения a из которых неравенство $\left|\frac{x^2-6x+a}{a-2x}-2\right| \leq 1$ справедливо при всех значениях x из отрезка $[0;1]$.

Решение:

Преобразуем неравенство:

$$\left|\frac{x^2-6x+a-2(a-2x)}{a-2x}\right| \leq 1 \leftrightarrow \left|\frac{x^2-2x-a}{a-2x}\right| \leq 1,$$

тогда, по определению модуля:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-a}{a-2x} \leq 1, \\ \dfrac{x^2-2x-a}{a-2x} \geq -1. \end{cases}$$

Данная система будет равносильна совокупности:

$$\left[\begin{cases} a-2x>0, \\ x^2-2x-a\le a-2x, \\ x^2-2x-a\ge -(a-2x); \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} a>2x, \\ a\ge \frac{x^2}{2}, \\ x^2-4x\ge 0; \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} a>2x, \\ a\ge \frac{x^2}{2}, \\ x(x-4)\ge 0; \end{cases}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} a<2x, \\ a\le \frac{x^2}{2}, \\ x^2-4x\le 0. \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} a<2x, \\ a\le \frac{x^2}{2}, \\ x(x-4)\le 0. \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} a>2x, \\ a\ge \frac{x^2}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ x\ge 4; \end{array}\right. \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} a<2x, \\ a\le \frac{x^2}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 0, \\ x\le 4. \end{array}\right. \end{cases}\right.$$

Данные неравенства рассмотрим как неравенства с двумя переменными от x и a и отметим корни $(x;a)$ в получившейся совокупности неравенств на координатной плоскости, где ось OX представляет собой переменную, ось ординат является значениями параметра a.

Закрашенные области голубым цветом являются множеством всех корней получившейся совокупности неравенств, так как преобразования являются равносильными, то и исходного неравенства. Корни $(x;a)$, выделенные синим цветом, при $x\in[0;1]$. График изображен на рисунке 60.

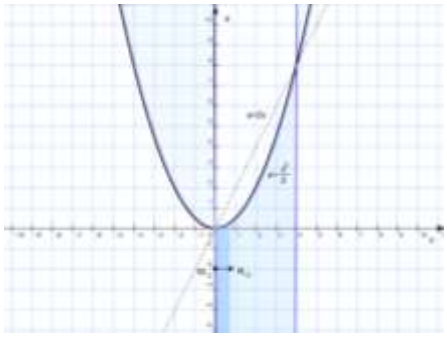

Рисунок 60

Если для некоторого значения параметра a верно данное неравенство при всех x из отрезка $[0;1]$, тогда отрезок $\mathcal{M}_a\mathcal{N}_a$, где $\mathcal{M}_a -$ точка, имеющая координаты $(0;a)$, а $\mathcal{N}_a$ имеет $(1;a)$. На рисунке видно, что $a < 0$.

Пример 2. ([15]) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

Решение:

В зависимости от того, $x < a$ или $x \geq a$, функция $f(x)$ будет принимать разный вид, тогда, запишем её в следующем виде:

$$f(x) = \begin{cases} a - x - x^2, x < a, \\ x - a - x^2, x \geq a. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ является непрерывной на всей числовой прямой, и график состоит из двух частей парабол, ветви их направлены вниз. Абсциссами вершин данных парабол равны $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$.

Рассмотрим $a \in (-\infty; -0,5]$, тогда функция $f(x)$ будет являться возрастающей при $x \in (-\infty; a) \cup [a; 0{,}5]$, и убывает при $x \in [0{,}5; +\infty)$. Тогда, функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x = 0{,}5$, график для $a = -1$ изображен на рисунке 64.

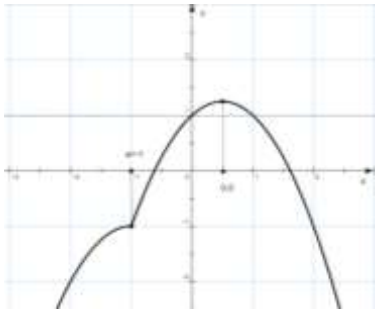

Рисунок 61

Найдем, такие $a \in (-\infty; -0,5]$, при которых наибольшее значение функции $f(x) \geq 1$:

$$f(0{,}5) \geq 1 \rightarrow 0{,}5 - a - (0{,}5)^2 \geq 1 \rightarrow a \leq -0{,}75.$$

Функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения $x = -0{,}5$, или $x = 0{,}5$, при $a \in (-0{,}5; 0{,}5)$, график изображен на рисунке 65, при $a = 0{,}1$.

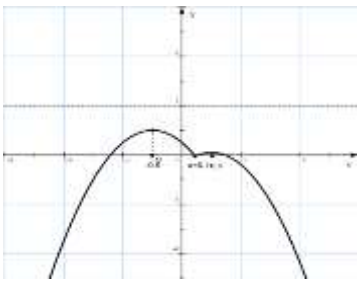

Рисунок 62

Найдем при каких a, где $a \in (-0{,}5; 0{,}5)$, наибольшее значение функции $f(x) \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} f(-0{,}5) \geq 1, \\ f(-0{,}5) \geq 1. \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a - (-0{,}5) - (-0{,}5)^2 \geq 1, \\ 0{,}5 - a - (0{,}5)^2 \geq 1. \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \geq 0{,}75, \\ a \leq -0{,}75. \end{bmatrix}$$

То есть, при $a \in (-0{,}5; 0{,}5)$ наибольшее значение данной функции $f(x) < 1$.

При $a \in [0{,}5; +\infty)$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения в одной точке $x = -0{,}5$. График изображен а рисунке 63, при $a = 0{,}75$.

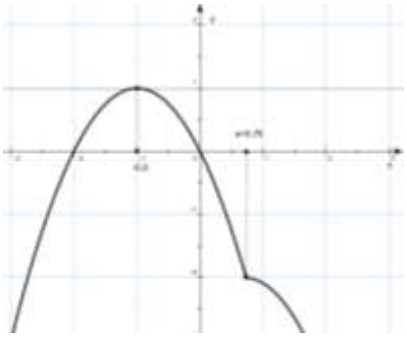

Рисунок 63

Найдем при каких значениях a, $a \in [0{,}5; +\infty)$, наибольшее значение функции $f(x) \geq 1$:

$$f(-0{,}5) \geq 1 \rightarrow a - 0{,}5 - (0{,}5)^2 \geq 1 \rightarrow a \geq 0{,}75.$$

Следовательно, при $a \in (-\infty; -0{,}75] \cup [0{,}75; +\infty)$ значение функции $f(x) \geq 1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -0{,}75] \cup [0{,}75; +\infty)$.

Пример 3. ([12]). Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x - a| - 4x \leq -a$ имеет единственное целочисленное решение. Для найденных значений a выпишите это решение.

Решение:

Раскроем неравенство по определению модуля действительно числа, тогда данное неравенство будет равносильно совокупности:

$$\left[\begin{cases} x-a\geq 0, \\ x^2+2(x-a)-4x\leq -a; \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{cases} a\leq x, \\ a\geq x^2-2x; \end{cases} \right. \right. \left[\begin{cases} a>x, \\ a\leq -\frac{1}{3}x^2+2x. \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} x-a<0, \\ x^2-2(x-a)-4x\leq -a. \end{cases} \right.$$

Рассмотрим систему координат $\mathcal{XOA}$. Построим прямую $x=a$, и графики $a=x^2-2x$, $a=-\frac{1}{3}x^2+2x$, с необходимыми по системе областями. Графики изображены на рисунке 64.

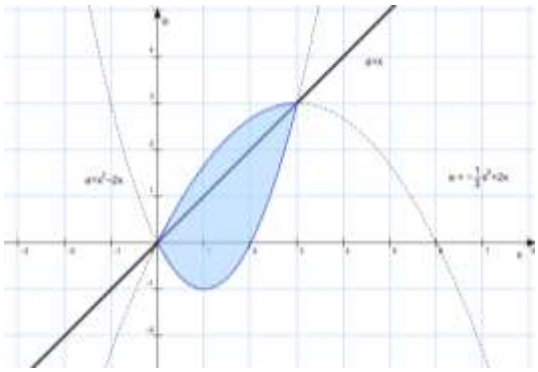

Рисунок 64

Рассмотрим функцию $a=-\frac{1}{3}x^2+2x$, найдем её значение в точке $x=1$, то есть $a=-\frac{1}{3}*1^2+2*1=\frac{5}{3}$.

Рассмотрим функцию $a=x^2-2x$, найдем её значение в точке $x=2$, то есть $a=-\frac{1}{3}*2^2+2*2=\frac{8}{3}$.

Целочисленное и единнственное решение $x=1$ имеется при $a\in[-1;0)$. Целочисленное и единственное решение $x=2$ имеется при $a\in\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right]$.

Целочисленное решение $x=3$ имеется при $a=3$.

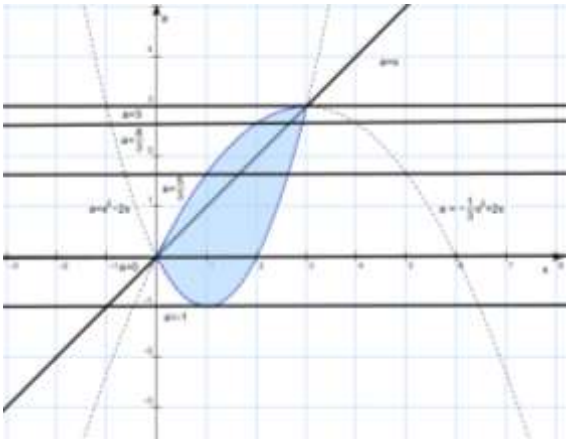

Рисунок 65

Ответ: $x = 1$, при $a \in [-1; 0)$; $x = 2$, при $a \in \left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right]$; $x = 3$, при $a = 3$.

2 Упражнение для самостоятельной работы.

Пример 4. ([15]) Найти все значения a, при каждом из которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения $|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5$.

Решение:

Представлено в приложении Н.

3 Домашнее задание.

Пример 5. ([15]) Найти все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

Решение:

Данное уравнение квадратное, поэтому найдем его дискриминант:

$$\mathcal{D} = 36 - 4(12 + a^2 - 4a) = -4(a^2 - 4a + 3).$$

При $\mathcal{D} \geq 0$, получаем корни уравнения $x_1 = \frac{6+\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$, $x_2 = \frac{6-\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$, то, разность их $\pm\sqrt{\mathcal{D}}$. Модуль разности корней будет принимать наибольшее значение тогда же, когда и дискриминант.

Рассмотрим квадратный трехчлен относительно переменной a: $ƒ(a) = a^2 - 4a + 3$. Тогда $\sqrt{\mathcal{D}} = -4ƒ(a)$, то дискриминант будет достигать максимальных значений при тех же a, при которых функция $ƒ(a)$ достигает своих минимальных

значений. Графиком функции $f(a)$ является парабола, с ветвями, направленными вверх, $f(a)$ имеет наименьшее значение в одной точке, которая является вершиной параболы.

Если уравнение имеет вид $a_1x^2 + b_1x + c$, то вершина параболы имеет абсциссу $x_{\text{вершина}} = -\frac{b_1}{2a_1}$. Следовательно, наименьшее значение $f(a)$ достигает только при единственном значении $a = -\frac{(-4)}{2} = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Заключение

Программа школьного курса математики не предусматривает обобщение и систематизацию знаний о модулях, их свойствах, полученных учащимися за весь период обучения. На тему «Модуль числа» по программе отводится мало времени, например: в 6 классе – 2 часа, в 8 классе – 4 часа. Хотя, задачи, связанные с абсолютными величинами, часто встречаются на математических олимпиадах и на ЕГЭ.

Из анализа материала по теме «Модуль числа» в школьных учебниках «Математика» под редакцией А. Г. Мордкович, задачи, связанные с модулем, не соответствуют уровню трудности, предлагаемых единым государственным экзаменом, которые вызывают у учащихся трудности при их решении ввиду слабой математической базы.

В ходе исследования проведён анализ математической, научно–методической, учебной литературы и школьных пособий.

В ходе проведенного исследования в соответствии с поставленными целями и задачами были получены следующие основные результаты и выводы:

1. При изучении психолого–педагогической и методической литературы по исследуемой теме было выявлено, что:

– средством для развития системного математического и логического мышления учащихся могут служить задачи, связанные с модулем;

– многообразие методов и способов решения задач с модулем может служить основой для развития самостоятельной деятельности учащихся в различных областях, что может привести к появлению новых моделей мышления;

– решение различных типов задач с модулем будет наилучшим образом способствовать повышению уровня математической культуры учащихся.

2. Подобрана и систематизирована теория по решению задач, связанных с модулем.

3. Разработан факультативный курс «Модуль», рассчитанный на 14 занятий. В нём подобраны задачи (91 пример, 25 таблиц), которые позволяют научить

учащихся решать задачи более высокого уровня сложности, овладевать рядом интеллектуальных и технических умений, свободно ими пользоваться. «Изучение и использование преобразования уравнений, неравенств и их систем, с одной стороны, предполагает достаточно высокую логическую структуру учащихся, а с другой стороны, в процессе изучения и применения таких преобразований имеются широкие возможности для формирования логической структуры». ([3]) Все графики, используемые в факультативном курсе (81 рисунок), выполнены в программе «Математический конструктор».

Для изучения данного курса рекомендованы нестандартные методы, которые позволяют более эффективно решать широкий класс заданий, содержащих модуль. Предлагаемый курс может быть использован учителем, как на уроках математики, так и на факультативных и дополнительных занятиях. Наряду с основной задачей обучения математики – обеспечением прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, предлагаемый курс предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой, выбору профиля дальнейшего обучения.

Список литературы

1. Блох, А. Я, Гусев, В. А., Дорофеев, Г. В. Методика преподавания математике в средней школе : Частная методика : учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико–математической специальности / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

2. Колмогоров, А. Н., Абрамов, А. М., Дудницин, Ю. П. Алгебра и начало анализа. 10 – 11 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницин – 14–е издание – М. : Просвещение, 2004. – 384 с.

3. Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и её преподавание: Учебное пособие для мат. спец. вузов / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1995. – 170 с.

4. Лаппо, Л. Д., Попов, М. А. Математика: сборник заданий / Лаппо Л. Д., Попов М. А. – М. : «Экзамен», 2015. – 157 с.

5. Мордкович, А. Г., Зубарева, И. И. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович, И. И. Зубарева – 14–е издание, стереотипное – М. : Мнемозина, 2014. – 264 с.

6. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч 1 : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович – 17–е издание, дополненное – М. : Мнемозина, 2013. – 175 с.

7. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч 1 : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович – 10–е издание, дополненное – М. : Мнемозина, 2013. – 256 с.

8. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч 1 : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович – 12–е издание, дополненное – М. : Мнемозина, 2010. – 224 с.

9. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 класс. В 2 ч. Ч 1 : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович – 2–е издание, дополненное – М. : Мнемозина, 2001. – 335 с.

10. О’Коннор, Дж. Искусство системного мышления / Дж. О Коннор, И. Макдермот. – М.: Альпина бизнес букс, 2006. – 256 с.

11. Севрюков, П. Ф., Смоляков А. Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения : учебно–методическое пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков – М. : Илекса, Народное образование, 2005. – 112с.

12. Семенов, А. В. Единый государственный экзамен. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся : учебное пособие / А. В. Семенов – М.: Интеллект – Центр, 2016. – 144 с.

13. Стрезикозин, В.П. Организация процесса обучения в школе : учебное пособие / В.П. Стрезикозин – 2–е издание – М.: Просвещение, 1968. – 245 с.

14. Фридман, Л. М. Психолого – педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математике о пед. психологии / Л. М. Фридман – М. : Просвещение, 1983. – 160 с.

15. Ященко, И. В. ЕГЭ 2016. Математика. Типовые текстовые задания / И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2016. – 55 с.

Приложение А

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 1. Общие сведенья о модуле. Определение, геометрический смысл, свойства модуля. Применение определения модуля при решении уравнений

3 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решите уравнение, первым способом:

$$\big||x| - 2\big| = 7.$$

Решение:

По определению модуля, имеем, что значение выражения $|x| - 2$ может быть равно 7 или -7. То есть, уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{bmatrix} |x| - 2 = 7, \\ |x| - 2 = -7. \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} |x| = 9, \\ |x| = -5. \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} |x| = 9, \\ \text{нет решения.} \end{bmatrix} \leftrightarrow x_1 = -9;\ x_2 = 9.$$

Ответ: $x_1 = -9; x_2 = 9$.

Пример 5. Решите уравнение, вторым способом:

$$\big|1 - |1 - x|\big| = 0{,}5.$$

Решение:

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ |1 - (1 - x)| = 0{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x < 0, \\ |1 + (1 - x)| = 0{,}5. \end{cases} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x \leq 1, \\ |x| = 0{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ |2 - x| = 0{,}5. \end{cases} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x \leq 1, \\ \begin{bmatrix} x_1 = 0{,}5, \\ x_2 = -0{,}5. \end{bmatrix} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \begin{bmatrix} x_3 = 1{,}5, \\ x_4 = 2{,}5. \end{bmatrix} \end{cases} \end{bmatrix} \leftrightarrow x_1 = 0{,}5; x_2 = -0{,}5;$$

$$x_3 = 1{,}5;\ x_4 = 2{,}5.$$

Ответ: $x_1 = 0{,}5; x_2 = -0{,}5; x_3 = 1{,}5; x_4 = 2{,}5$.

Приложение Б

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 2. Метод интервалов для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 3. Решите уравнение:

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|=4.$$

Решение:

1) область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3;$

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty;1)$, $[1;2)$, $[2;3)$, $[3;+\infty)$;

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице Б.1:

Таблица Б.1

	$(-\infty;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;+\infty)$
$\lvert x-1\rvert$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\lvert x-3\rvert$	$-$	$-$	$-$	$+$

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{cases} x<1, \\ -(x-1)-(x-2)-(x-3)=4; \end{cases} \begin{cases} 1\le x<2, \\ (x-1)-(x-2)-(x-3)=4; \end{cases} \begin{cases} 2\le x<3, \\ (x-1)+(x-2)-(x-3)=4; \end{cases} \begin{cases} 3\le x<+\infty, \\ (x-1)+(x-2)+(x-3)=4. \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} x<1, \\ x=1; \end{cases} \begin{cases} 1\le x<2, \\ x=0; \end{cases} \begin{cases} 2\le x<3, \\ x=4; \end{cases} \begin{cases} x\ge 3, \\ x=\frac{10}{3}. \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} x<1, \\ \text{нет решения}; \end{cases} \begin{cases} 1\le x<2, \\ \text{нет решения}; \end{cases} \begin{cases} 2\le x<3, \\ \text{нет решения}; \end{cases} \begin{cases} x\ge 3, \\ x=\frac{10}{3}. \end{cases}\right. \leftrightarrow$$

$$x=\frac{10}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{10}{3}$.

Пример 4. Решите уравнение:

$$|6 - 2x| + |3x + 7| - 2|4x + 11| = x - 3.$$

Решение:

1) область определения подмодульных функций – все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{7}{3};\ x_3 = -\frac{11}{4};$

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right), \left[-\frac{11}{4}; -\frac{7}{3}\right), \left[-\frac{7}{3}; 3\right), [3; +\infty);$

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице Б.2:

Таблица Б.2

	$\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$	$\left[-\frac{11}{4}; -\frac{7}{3}\right)$	$\left[-\frac{7}{3}; 3\right)$	$[3; +\infty)$
$\|6 - 2x\|$	+	+	+	−
$\|3x + 7\|$	−	−	+	+
$\|4x + 11\|$	−	+	−	+

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -\frac{11}{4}, \\ (6 - 2x) - (3x + 7) + 2(4x + 11) = x - 3; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{11}{4} \le x < -\frac{7}{3}, \\ (6 - 2x) - (3x + 7) - 2(4x + 11) = x - 3; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{7}{3} \le x < 3, \\ (6 - 2x) + (3x + 7) - 2(4x + 11) = x - 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3, \\ -(6 - 2x) - (3x + 7) - 2(4x + 11) = x - 3. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -\frac{11}{4}, \\ x = -9; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{11}{4} \le x < -\frac{7}{3}, \\ x = -\frac{10}{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{7}{3} \le x < 3, \\ x = -\frac{3}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3, \\ x = -4{,}5. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < -\frac{11}{4},\\ x = -9;\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{11}{4} \le x < -\frac{7}{3},\\ \text{нет решения;}\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{7}{3} \le x < 3,\\ x = -\frac{3}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge 3,\\ \text{нет решения.}\end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow x_1 = -9; x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $x_1 = -9; x_2 = -\frac{3}{4}$.

Приложение В

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 3. Решение неравенств с модулем посредством равносильных переходов

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решите неравенство:

$$|x^2 - 8| \geq 1.$$

Решение:

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 1, \\ x^2 - 8 \leq -1. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ x^2 - 7 \leq 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 3], \\ x \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty). \end{cases}$$

Обозначим числовые промежутки на оси и найдем их пересечение:

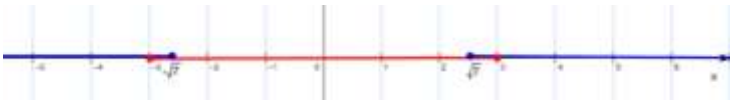

Рисунок 69

Следовательно, решение системы является числовые отрезки $[-1; 2]$ и $[3; 6]$.

Ответ: $x \in [-1; 2] \cup [3; 6]$.

Пример 5. Решить неравенство:

$$|x^2 - 3x + 2| > x + 3.$$

Решение:

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 3x + 2 > x + 3, \\ x^2 - 3x + 2 < -(x + 3). \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 4x - 1 > 0, \\ x^2 - 2x + 5 < 0. \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \in (-\infty; 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}; +\infty), \\ \text{нет решения.} \end{bmatrix} \leftrightarrow x \in (-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство:

$$|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3.$$

Решение:

Воспользуемся равносильным переходом:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \le x + 3, \\ x^2 - 4x + 3 \ge -(x + 3). \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \le 0, \\ x^2 - 3x + 6 \ge 0. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5, \\ \text{нет решения.} \end{cases} \leftrightarrow x \in [0; 5].$$

Ответ: $x \in [0; 5]$.

Приложение Г

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 4. Решением уравнений и неравенств с модулями на координатной прямой

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решить неравенство:

$$|x - 1| < 2.$$

Решение:

Числа, удаленные от 1 на расстояние 2 равны 3 и -1. По условию требуется найти точки, удаленные от 1 на расстояние меньше 2. Такие точки расположены между -1 и 3.

Ответ: $x \in (-1; 3)$.

Пример 5. Решить неравенство:

$$|x + 1| > 2.$$

Решение:

Числа, удаленные от -1 на расстояние 2 равны 1 и -3. По условию требуется найти точки, удаленные от -1 на расстояние больше 2. Такие точки расположены на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Пример 6. Решите уравнение:

$$|x - 2| = 0{,}4.$$

Решение:

Запись данного уравнения переводится на «язык расстояний» следующим образом: «Расстояние от точки с координатой x до точки с координатой 2 равно 0,4». Тогда, решением уравнения являются точки, удаленные от точки с координатой 2 на расстояние 0,4. Эти точки имеют координаты 1,6 и 2,4.

Ответ: $x_1 = 1{,}6$; $x_2 = 2{,}4$.

Пример 7. Решите уравнение:

$$|x + 3| = 0{,}7.$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $|x-(-3)|=0{,}7$, используя формулу расстояния. Запись данного уравнения переводится на «язык расстояний» следующим образом: «Расстояние от точки с координатой x до точки с координатой -3 равно $0{,}7$». Тогда, решением уравнения являются точки, удаленные от точки с координатой -3 на расстояние $0{,}7$. Эти точки имеют координаты $-3{,}7$ и $-2{,}3$.

Ответ: $x_1=-3{,}7;\ x_2=-2{,}3$.

Пример 8. Решить неравенство:

$$|x-2{,}5|\leq 0{,}5.$$

Решение:

Числа, удаленные от $2{,}5$ на расстояние $0{,}5$ равны 3 и 2. По условию требуется найти точки, удаленные от 1 на расстояние меньше или равное $0{,}5$. Такие точки расположены между 2 и 3, включая сами точки, так как равенство не строгое.

Ответ: $x\in[2;3]$.

Пример 9. Решить неравенство:

$$|10-x|<7.$$

Решение:

По свойству модуля выражение примет вид:

$$|x-10|<7.$$

Числа, удаленные от 10 на расстояние 7 равны 3 и 17. По условию требуется найти точки, удаленные от 10 на расстояние меньше 7. Такие точки расположены между 3 и 17.

Ответ: $x\in(3;17)$.

Пример 10. Решить неравенство:

$$|x+1|>1.$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $|x-(-1)|>1$, используя формулу расстояния. Числа, удаленные от -1 на расстояние 1 равны 0 и -2. По условию требуется найти точки, удаленные от -1 на расстояние больше 1. Такие точки расположены на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$.

Приложение Д

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 5. Модуль и иррациональные уравнения

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Решите уравнение:

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$$

Пусть $y=\sqrt{x+1}$, где $y\geq 0$, тогда выразим x через y:

$$y^2=x+1,$$

Следовательно:

$$y^2+4=x+5,$$

$$y^2+1=x+2.$$

Тогда, данное уравнение примет вид:

$$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-2y+1}=1.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению:

$$|y-2|+|y+1|=1,$$

Решим его методом интервалов.

Нули подмодульных выражений: $y_1=2;\ y_2=-1$.

Полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы $[0;2),[2;+\infty)$, с учетом, что $y\geq 0$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице Д.1:

Таблица Д.1

	$[0;2)$	$[2;+\infty)$
$\lvert y-2\rvert$	$-$	$+$
$\lvert y+1\rvert$	$+$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{cases} 0 \le y < 2, \\ -(y-2)+y+1=1; \end{cases} \right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \le y < 2, \\ 0 \cdot y = -2; \end{cases} \right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \le y < 2, \\ y \in \mathbb{R}; \end{cases} \right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} y \ge 2, \\ y-2+y+1=1. \end{cases} \right. \left[\begin{cases} y \ge 2; \\ y = 1. \end{cases} \right. \left[\begin{cases} y \ge 2; \\ \text{решений нет.} \end{cases} \right.$$

$$0 \le y < 2.$$

Вернемся к замене переменной. Так как $y = \sqrt{x+1}$, где $y \ge 0$, то:

$$0 \le y < 2,$$

$$0 \le \sqrt{x+1} < 2,$$

$$0 \le x+1 < 2,$$

$$-1 \le x < 1.$$

Таким образом, решение данного уравнение также является числовой промежуток $x \in [-1; 1)$.

Ответ: $x \in [-1; 1)$.

Приложение Е

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 6. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком модуля

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 4. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+4}}.$$

Область допустимых значений:

Данное выражение определено при любых x, кроме 2 и 3.

Решение:

$$\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{3-x}+\frac{x-3}{\sqrt{(x-2)^2}}=$$

$$=\frac{|x-3|}{3-x}+\frac{x-3}{|x-2|}.$$

Нули подмодульных выражений: $x_1=3;\ x_2=2$. Данные точки, с учетом ОДЗ, делят числовую ось на интервалы $(-\infty;2),(2;3),(3;+\infty)$. Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице Е.1:

Таблица Е.1

	$(-\infty;2)$	$(2;3)$	$(3;+\infty)$
$\lvert x-3\rvert$	$-$	$-$	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-$	$+$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<2, \\ \dfrac{-(x-3)}{3-x}+\dfrac{x-3}{-(x-2)}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x<3, \\ \dfrac{-(x-3)}{3-x}+\dfrac{x-3}{x-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ \dfrac{x-3}{3-x}+\dfrac{x-3}{x-2}. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<2, \\ 1+\dfrac{x-3}{-(x-2)}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x<3, \\ 1+\dfrac{x-3}{x-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ -1+\dfrac{x-3}{x-2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<2, \\ 1+\frac{x-3}{-(x-2)}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x<3, \\ 1+\frac{x-3}{x-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ -1+\frac{x-3}{x-2}. \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 5. Упростите выражение:

$$\frac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}.$$

Область допустимых значений:

Выражение $x^2-4|x-1|$ обращается в ноль при -2 и 2. Следовательно, данное выражение определено при любых x, кроме -2 и 2.

Решение:

$$\frac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}=\frac{(x+2)|x-2|}{x^2-4|x-1|}.$$

Нули подмодульных выражений: $x_1=2;\ x_2=1$. Данные точки, с учетом ОДЗ, делят числовую ось на интервалы $(-\infty;-2),(-2;1),[1;2),(2;+\infty)$.

Знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице Е.2:

Таблица Е.2

	$(-\infty;-2)$	$(-2;1)$	$[1;2)$	$(2;+\infty)$.
$\|x-2\|$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\|x-1\|$	$-$	$-$	$+$	$+$

Учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x^2+4(x-1)}; \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x\le 1, \\ \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x^2+4(x-1)}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x<2, \\ \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x^2-4(x-1)}; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2-4(x-1)}. \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{4-x^2}{x^2+4x-4}; \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x\le 1, \\ \dfrac{4-x^2}{x^2+4x-4}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x<2, \\ \dfrac{-(x+2)}{x-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ \dfrac{x+2}{x-2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ \frac{4-x^2}{x^2+4x-4}; \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x\le 1, \\ \frac{4-x^2}{x^2+4x-4}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x<2, \\ \frac{-(x+2)}{x-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ \frac{x+2}{x-2}. \end{cases} \end{array}\right.$

Приложение Ж

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 7–8. Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$

4 Упражнение для самостоятельной работы.

Пример 7. Построить график функции, решить вторым способом:

$$y = x^2 - |x| - 6.$$

Решение:

1) построим график квадратичной функции $y = x^2 - x - 6$, и возьмём только ту часть параболы, которая лежит в правой координатной полуплоскости, она выделена на рисунке 66;

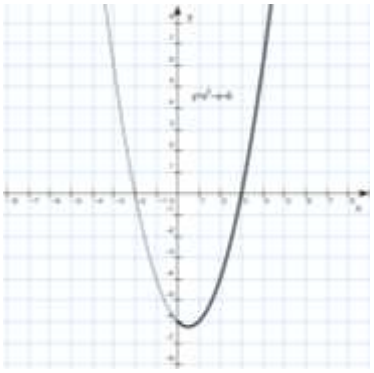

Рисунок 66

2) добавим к ней симметричный образ относительно оси OY. В итоге получим нужный график, представленный на рисунке 67;

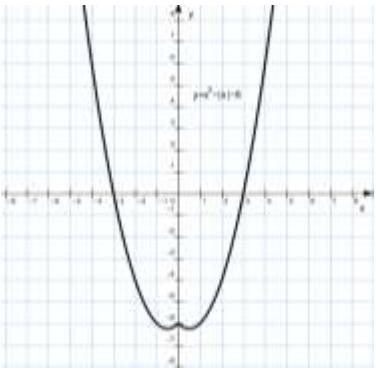

Рисунок 67

Приложение И

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 9–10. Построение графиков функции вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$, и графиков неявно заданных функций

7 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 8. Построить график функции:

$$|y| = |x^2 + 6|.$$

Область допустимых значений:

Областью допустимых значений являются все действительные числа.

Решение:

Для построения достаточно построить график функции $y = x^2 + 6$, а затем к построенному графику добавить симметричный относительно оси OX, график изображен на рисунке 68.

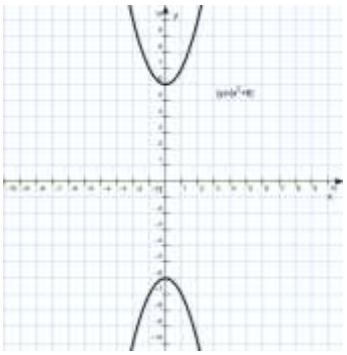

Рисунок 68

Приложение К

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 11. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, графическим способом

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 5. Решить неравенство:

$$2 + 3|x| \leq -x - 6.$$

Решение:

Построим графики функции $y = 2 + 3|x|$, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = f(|x|)$. То есть сначала построим график $y = 2 + 3x$, при $x \geq 0$, и отобразим симметрично оси ординат. Также, построим график функции $y = -x + 6$. Оба графика изображены на рисунке 69.

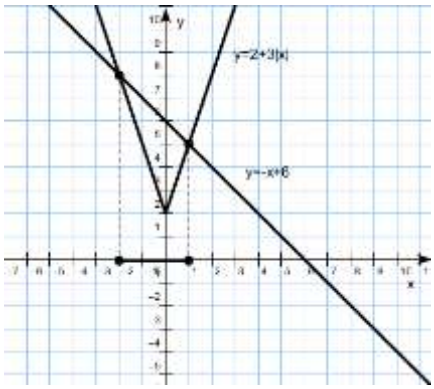

Рисунок 69

Тогда, решением данного неравенства будет являться числовой отрезок $[-2; 1]$.

Ответ: $[-2; 1]$.

Пример 6. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4 + 5|x| \leq 9; \\ |6 - x| < 14. \end{cases}$$

Решение:

Изобразим на координатной плоскости координатной графики функций $y = 9$, $y = 14$. Для того чтобы изобразить график функции $y = 4 + 5|x|$ необходимо,

согласно алгоритму для построения графика функции $y = f(|x|)$, сначала построить график функции $y = 4 + 5x$, при $x \geq 0$, и отобразим симметрично оси ординат.

Построим график функции $y = |6 - x|$. Для этого, согласно алгоритму для построения графика функции $y = |f(x)|$, оставим без изменения ту часть графика функции $y = 6 - x$, которая лежит не ниже оси OX. Часть графика функции $y = 6 - x$, которая лежит ниже оси OX, заменим на симметричные ей относительно оси OX.

Графики функций $y = 9$, $y = 14$, $y = 4 + 5|x|$, $y = |6 - x|$ изображены на рисунке 70.

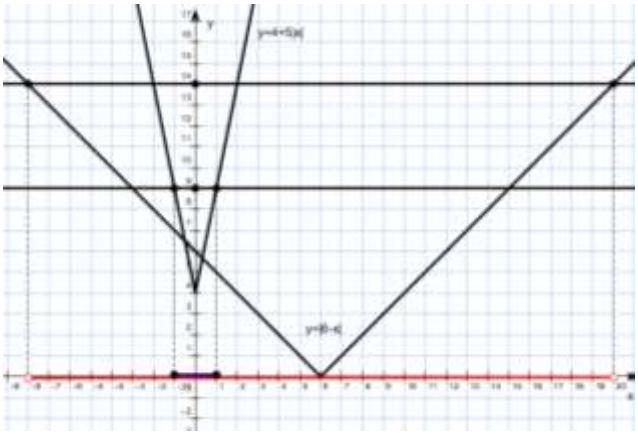

Рисунок 70

Первое неравенство системы имеет решение при $x \in [-1; 1]$, второе неравенство имеет решение при $x \in (-8; 20)$. Эти промежутки пересекаются при $x \in [-1; 1]$.

Следовательно, решением системы является числовой отрезок $x \in [-1; 1]$.

Ответ: $x \in [-1; 1]$.

Приложение Л

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 12. Решение уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих модуль, графическим способом

4 Упражнения для самостоятельной работы.

Пример 5. Решить неравенство:

$$y < 9|x| - 5.$$

Решение:

Построим график функции $y = 9|x| - 5$, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = f(|x|)$. То есть сначала построим график линейной $y = 9x - 5$, при $x \geq 0$, и отобразим симметрично оси ординат. График изображен на рисунке 71.

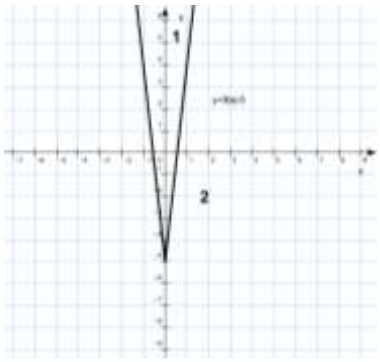

Рисунок 71

Применим метод «интервалов». Тогда, график разбивает плоскость OXY на 2 области. Возьмем точку в первой части с координатой $(1; 0)$. В данной точке неравенство выполняется. Так как неравенство строгое, то график функции не будет входить в решение данного неравенства. Решение данного неравенства изображено на рисунке 72.

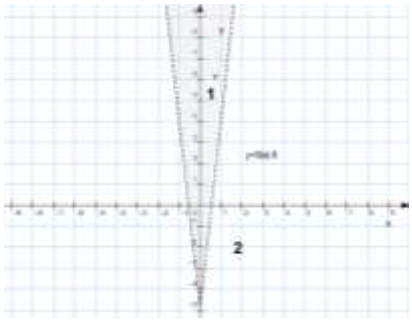

Рисунок 72

Пример 6. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |2x - y| \leq 2, \\ |3x + y| \leq 3. \end{cases}$$

Решение:

По определению модуля следует:

$$\begin{cases} -2 \leq 2x - y \leq 2, \\ -3 \leq 3x + y \leq 3. \end{cases}$$

Выразим y, получим:

$$\begin{cases} -2 - 2x \leq y \leq 2 - 2x, \\ -3 + 3x \leq y \leq 3 + 3x. \end{cases}$$

Тогда построим прямые $y = -2x - 2$, $y = -2x + 2$, $y = 3x - 3$, $y = 3x + 3$. Они разобьют плоскость OXY на девять частей.

Изобразим множество точек в плоскость OXY, удовлетворяющих последней системе двойных неравенств. Решением являются все точки внутри и на границе прямоугольника. Возьмем точку в первой части с координатой $(0; 0)$. В данной точке неравенство выполняется. Так как неравенство не строгое, то графики функций (границы первой части) будут входить в решение данного неравенства. Решение данного неравенства изображено на рисунке 73.

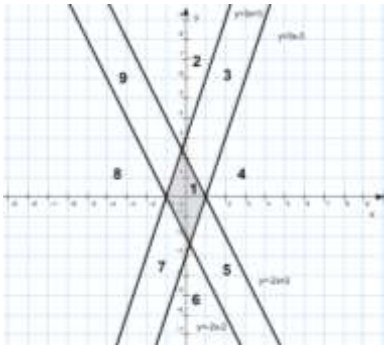

Рисунок 73

Приложение М

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 13. Урок контроля знаний, умений и навыков учащихся по изученному курсу «Модуль числа»

1 вариант.

Задание 1.

Решение:

$\left|7\sqrt[4]{16}-4\pi\right| = |7*4-4\pi|$, так как $7*4 > 4\pi$, тогда, $7*4-4\pi > 0$, то по определению модуля действительно числа следует, что $|7*4-4\pi| = 7*4-4\pi$.

Ответ: $7*4-4\pi$.

Задание 2.

Решение:

Рассмотрим, $\sqrt{(2x-6)^2} = |2x-6| = 2|x-3|$, так как $x-3 \geq 0$, то по определению модуля действительно числа следует, что $2|x-3| = 2(x-3)$.

Ответ: $2(x-3)$.

Задание 3.

Решение:

1) область определения подмодульных функций все действительные числа. Нули подмодульных выражений: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

2) полученные точки разбивают координатную прямую на интервалы: $(-\infty;-1), [-1;0), [0;1), [1;+\infty)$.

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице М.1:

Таблица М.1

	$(-\infty;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;+\infty)$
$\|x\|$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\|x^2-1\|$	$+$	$-$	$-$	$+$

4) учитывая знаки, раскроем модули. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{cases} x < -1, \\ -x + (x^2 - 1) = 4; \end{cases} \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x - (x^2 - 1) = 4; \end{cases} \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x - (x^2 - 1) = 4; \end{cases} \begin{cases} x \ge 1, \\ x + (x^2 - 1) = 4; \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} x < -1, \\ x^2 - x - 5 = 0; \end{cases} \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x^2 - x - 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ -x^2 + x - 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \ge 1, \\ x^2 + x - 5 = 0; \end{cases}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{cases} x < -1, \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}; \end{cases} \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ \text{нет решений}; \end{cases} \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ \text{нет решений}; \end{cases} \begin{cases} x \ge 1, \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \end{cases}\right.$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2};\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

Задание 4.

Решение:

Построим графики функции $y = |4 + 8x|$, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = |f(x)|$. То есть сначала построим график $y = 8 + 4x$. С осью OX график пересекается в точке -2, а с осью OY в точке 8. График изображён на рисунке 74.

Рисунок 74

Воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть прямой, которая лежит не ниже оси OX, то есть на промежутке $[-2; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси OX ту часть

прямой, которая лежит ниже оси $\mathcal{OX}$, то есть на интервале $(-\infty;-2)$. В результате получили график $y=|4+8x|$, представленный на рисунке 75.

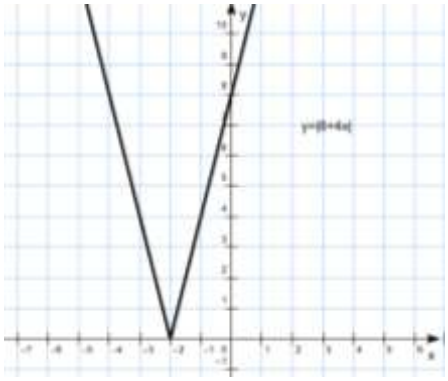

Рисунок 75

Также, построим график функции $y=3x-4$. Найдем ту часть оси, где график $|8+4x|\leq 3x-4$. Оба графика не пересекаются, следовательно, неравенство не имеет решения. Графики изображены на рисунке 76.

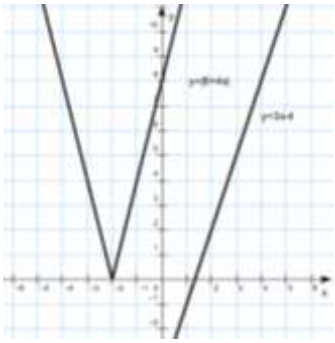

Рисунок 76

Ответ: $x\in\emptyset$.

2 вариант.

Задание 1.

Решение:

$\left|4\frac{2}{3}\pi-\sqrt{21\frac{7}{9}}\right|=\left|\frac{14}{3}\pi-\sqrt{\frac{196}{9}}\right|$, так как $\frac{14}{3}\pi>\sqrt{\frac{196}{9}}$, тогда, $\frac{14}{3}\pi-\sqrt{\frac{196}{9}}>0$, то по определению модуля действительно числа следует, что $\left|\frac{14}{3}\pi-\sqrt{\frac{196}{9}}\right|=\frac{14}{3}\pi-\sqrt{\frac{196}{9}}$.

Ответ: $\frac{14}{3}\pi-\sqrt{\frac{196}{9}}$.

Задание 2.

Решение:

Рассмотрим, $\sqrt{(2x-6)^2} = |2x-6| = 2|x-3|$, так как $x-3<0$, то по определению модуля действительно числа следует, что $2|x-3| = -2(x-3)$.

Ответ: $-2(x-3)$.

Задание 3.

Решение:

1) область определения подмодульной функции все действительные числа. Нуль подмодульного выражения $x = 6$;

2) полученная точка разбивает координатную прямую на интервалы: $(-\infty; 6), [6; +\infty)$;

3) знаки подмодульных выражений на каждом из полученных интервалов представлены в таблице М. 2:

Таблица М.2

	$(-\infty; 6)$	$[6; +\infty)$
$\lvert x-6\rvert$	$-$	$+$

4) учитывая знаки, раскроем модуль. В результате получим совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{cases} x < 6, \\ -(x-6)+x = 7; \end{cases} \begin{cases} x \geq 6, \\ x-6+x = 7. \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} x < 6, \\ 0 * x = 1; \end{cases} \begin{cases} x \geq 6, \\ x = \frac{13}{2}. \end{cases}\right. \leftrightarrow \left[\begin{cases} x < 6, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \begin{cases} x \geq 6, \\ x = \frac{13}{2}. \end{cases}\right. \leftrightarrow x \in (-\infty; 6) \cup \left(\frac{13}{2}\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 6) \cup \left(\frac{13}{2}\right)$.

Задание 4.

Решение:

Построим графики функции $y = |1-x|$, пользуясь алгоритмом построения графика функции $y = |f(x)|$. То есть сначала построим график $y = 1-x$. С осью OX график пересекается в точке 1, а с осью OY в точке 1. График изображён на рисунке 77.

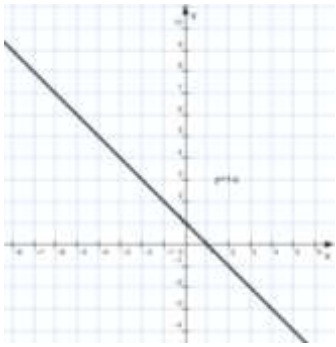

Рисунок 77

Воспользуемся алгоритмом и построим требуемый график. Оставим без изменения ту часть прямой, которая лежит не ниже оси $\mathcal{OX}$, то есть на промежутке $[1; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси $\mathcal{OX}$ ту часть прямой, которая лежит ниже оси $\mathcal{OX}$, то есть на интервале $(-\infty; 1)$. В результате получили график $y = |1 - x|$, представленный на рисунке 78.

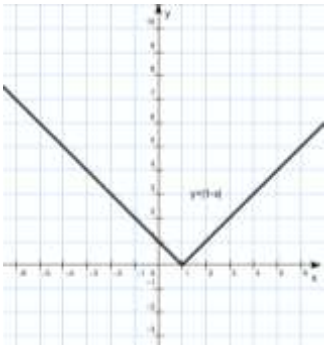

Рисунок 78

Также, построим график функции $y = x + 5$. Найдем ту часть оси, где график $|1 - x| \leq x + 5$. Оба графика не пересекаются, следовательно, неравенство не имеет решения. Графики изображены на рисунке 79.

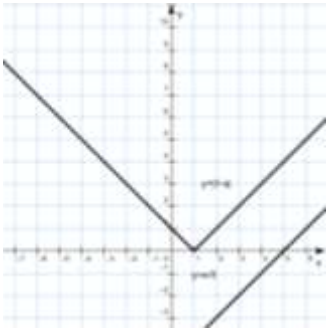

Рисунок 79

Ответ: $x \in \emptyset$.

Общие задания:

Задание 5.

Решение:

Рассмотрим функцию $(x+1)^2+(y-4)^2=9$, графиком данной функции является окружность с центром в точке $(-1;4)$ и радиусом 3.

Так как множество точек с координатами $(x;y)\to(|x|;|y|)$, то построим окружность, с уравнением $(x+1)^2+(y-4)^2=9$, в первой четверти, и симметрично отобразим ее относительно оси OX и OY, а также начала координат. График изображен на рисунке 80.

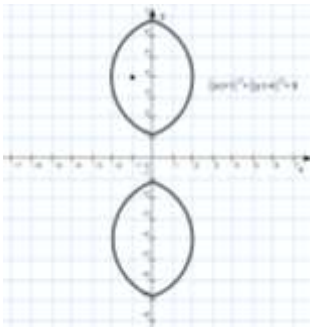

Рисунок 80

Данная фигура и является решением уравнения.

При решении неравенств вида $F(x;y)\geq 0$ или $F(x;y)<0$ строят график функции вида $F(x;y)=0$, тогда плоскость OXY будет разбита на несколько частей. Далее выбирается по каждой точки из части и проверяется выполнение уравнения на каждой из областей.

Задание 6.

Решение:

По определению модуля следует:

$$\begin{cases}-2\leq x-y\leq 2,\\-3\leq x+y\leq 3.\end{cases}$$

Выразим y, получим:

$$\begin{cases}-2-x\leq y\leq 2-x,\\-3+x\leq y\leq 3+x.\end{cases}$$

Тогда построим прямые $y=-x-2$, $y=-x+2$, $y=x-3$, $y=x+3$. Они разобьют плоскость OXY на шесть частей.

Изобразим множество точек в плоскость OXY, удовлетворяющих последней системе двойных неравенств. Решением являются все точки внутри и на границе прямоугольника. Возьмем точку в первой части с координатой $(0;0)$. В данной точке неравенство выполняется. Так как неравенство нестрогое, то границы первой части будут входить в решение данного неравенства. Решение данного неравенства изображено на рисунке 81.

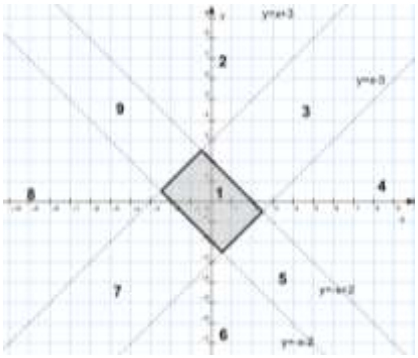

Рисунок 81

Приложение Н

Решение заданий предлагаемых для самостоятельной работы в занятии 14. Модуль в заданиях Единого Государственного Экзамена

2 Упражнение для самостоятельной работы.

Пример 4. (Ящ. 8 вариант, 36). Найти все значения a, при каждом из которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения $|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5$.

Решение:

Если левая часть уравнения $2a + 5 < 0$, то уравнение не имеет решения.

Пусть $a = -2{,}5$, то уравнение примет вид:

$$|x + 0{,}5| + |x + 0{,}5| = 0.$$

Тогда, ни одно из чисел отрезка $2 \le x \le 3$ не является его решением.

Рассмотрим $a > -2{,}5$, и запишем уравнение в следующем виде:

$$|x - (a + 2)| + |x - (-a - 3)| = 2a + 5.$$

Если $a > -2{,}5$, то верно равенство, что $-a - 3 < a + 2$. Тогда любое число из отрезка $[-a - 3; a + 2]$ является решением неравенства, и длина данного отрезка равна $(a + 2) - (-a - 3) = 2a + 5$, и неравенству удовлетворяют только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a + 2$, $x = -a - 3$ составляет $2a + 5$. Найдем те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a - 3; a + 2]$ содержит в себе отрезок $[2; 3]$. Это будет выполнено тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} -a - 3 \le 2, \\ a + 2 \ge 3. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a \ge 5, \\ a \ge 1. \end{cases} \leftrightarrow a \ge 1.$$

Ответ: $a \ge 1$.