**Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств.**

1. **Решение нестандартных уравнений и неравенств**

**с помощью метода мажорант.**

Метод мажорант применяется при решении нестандартных уравнений и неравенств, которые не получается решить с помощью стандартных приёмов.

Название **метода мажорант** происходит от французских слов

*majorer* - объявлять большим и *minorer* - объявлять меньшим.

Метод мажорант применяется для задач, в которых множества значений левой и правой частей уравнения или неравенства имеют единственную точку, являющуюся наибольшим значением для одной части и наименьшим для другой.

**Как начинать решать такие задачи?**

Привести уравнение или неравенство к виду **ƒ*()* = *g()***

Сделать оценку обеих частей, если существует число ***М,*** из области значений такое, что ***ƒ() М*** *и* ***g() М***, то

Решить систему уравнений:

Чтобы успешно пользоваться этим методом, нужно хорошо знать, какие функции имеют ограниченное множество значений.

Приведём **примеры элементарных функций, которые имеют ограниченное множество значений:**

1. **– 1 1 или 1**
2. **– 1 1 или 1**
4. **0**
5. **–**
6. **0**
7. **–**
8. **0**

***Опорные неравенства:***

1. а) + при , равенство = 1;

б) + при , равенство достигается при = – 1.

1. при равенство достигается при  *=.*
2. .

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Пример 1**. **Решить уравнение**

**Решение.**

**ƒ()=**

**(ƒ): (ƒ)=.**

**(g)= R, ()**

Найдём мажоранту функции ƒ( с помощью производной:

ƒ'();

(ƒ') = (2; 4).

Найдём критические точки:

, ,

ƒ'()

ƒ()

Имеем:

**Ответ: .**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Пример 2.** **Решить уравнение**

**Решение**. Рассмотрим функции

***ƒ()* = *(ƒ)* = *R, ƒ()***

***()* =** , ***(g) = R.***

Так как  для всех и , поэтому ***()***

Данное уравнение равносильно системе:

**.**

Число 8 –корень первого уравнения системы. Проверим, является ли оно корнем второго уравнения:

Значит, число 8 - решение системы.

**Ответ:**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 3**. **Решите уравнение = .**

**Решение**. Оценим обе части уравнения.

При всех значениях верны неравенства  **и 1**.

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

**.**

При = 0 второе уравнение превращается в верное равенство, значит, корень уравнения.

**Ответ:**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 4. Решите уравнение = .**

**Решение**. Оценим обе части уравнения.

При всех значениях верны неравенства.

и **– 1 1 1**.

Мы получили, что левая часть уравнения не меньше 1, а правая часть – не больше 1.

Следовательно данное уравнение равносильно системе:

.

Последняя система не имеет решений, так как 0 не удовлетворяет второму уравнению.

**Ответ:** .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 5**. **Решите уравнение .**

**Решение**.

а) Так как  ***+*** то *+* .

б)

**2**.

Из а) и б) получим

**Ответ:**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 6**. **Решите уравнение .**

**Решение**. Оценим обе части уравнения.

Так как **– 1 1**, то левая часть уравнения принимает значение от 0,5 до 2 (так как ).

Для правой части (в силу неравенства для суммы двух взаимно обратных чисел) выполнено **=**

Поэтому уравнение имеет решение, если только одновременно выполнены два условия:

**; ;**

Решая последнюю систему,получаем **.**

**Ответ:**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 7**. **Решите уравнение *sin* + *sin* 9 = 2.**

**Решение**. Оценим обе части уравнения.

1) Каждое слагаемое левой части не больше 1, следовательно их сумма будет равна 2, если они принимают своё наибольшее значение.

Значит, уравнение равносильно системе .

2) Решая уравнение системы, находим: , .

3) Подставим найденное значение во второе уравнение:

Следовательно, , решение системы.

**Ответ:**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 8**. **Решите неравенство .**

**Решение.**

Сделаем оценку функций, входящих в неравенство.

Очевидно, что **– 1 1 1**.

Так как **=** то данная функция принимает наибольшее значение равное **1** при , значит,  **1**.

Следовательно, исходное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1 одновременно.

.

Получаем  - единственное решение системы уравнений, а, значит, и данного неравенства.

**Ответ:.**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 9**. **Решите неравенство .**

**Решение.**

**∙ , > 0**

Сделаем оценку функций, входящих в неравенство.

а) **0 1;**

б) **= 1.**

Так как левая часть неравенства не больше 1, а правая – равна 1, то

;

**Ответ:.**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример 10**. **Найдите наибольшее целое значение *c*, при котором**

**решение неравенства**

**удовлетворяет условию .**

**Решение.**

**37**

**70**

**13 .**

Для выполнения неравенства, надо, чтобы  **13 .**

То есть, наибольшее целое ***c =* 5**.

**Ответ:.**

**Пример 11. Решить систему уравнений**

.

**Решение.**

при , **n Z**, .

Следовательно, первое уравнение равносильно системе

Сама система имеет вид:

; ; .

**Ответ:;**