

### Практическая работа № 3

#### Тема: Иррациональные уравнения

#### Цели:

- Ввести понятие иррационального уравнения.
- Закрепить навыки решения иррациональных уравнений
- Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

**Оборудование:** Учебник «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 классы, Ш. А. Алимов и др., справочные материалы.

#### Теоретическая часть

**Иррациональное уравнение** – это уравнения, в которых неизвестное находится под знаком корня.

**Свойство:** при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение – следствие данного.

Рассмотрим виды иррациональных уравнений

1.  $\sqrt{f(x)} = a$

В этом случае мы можем воспользоваться определением квадратного корня.

Из него следует, что  $a \geq 0$ , тогда  $(\sqrt{a})^2 = a$

Для нашего случая получим

$$(\sqrt{f(x)})^2 = a^2 \text{ или } f(x) = a^2$$

1.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$

Мы знаем, что сумма положительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю.

Т.е.  $\{f(x) = 0 \quad g(x) = 0$

1.  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

По определению квадратного корня  $f(x) > 0$ . Таким образом, чтобы найти такие значения неизвестной, при которых выполняются следующие условия:

$$\{f(x) \geq 0 \quad g(x) \geq 0 \quad f(x) = g(x)$$

#### Примеры:

1.  $\sqrt{x} = 2$

$$x = 2^2$$

$$x = 4$$

Ответ:  $x=4$

1.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 0$

$$\begin{cases} x+2=0 \\ x-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ x=4 \end{cases}$$

следовательно, решений нет

Ответ: решений нет

**Определение.** Неравенство, содержащие переменную под знаком корня, называется иррациональным.

Иррациональное неравенство, как правило, сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

1.  $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \{g(x) \geq 0, f(x) > g(x)$

2.  $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \{g(x) \geq 0, f(x) \geq g(x)$

3.  $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \{f(x) \geq 0, g(x) > 0, f(x) < g^2(x)$

4.  $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \{f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f(x) \leq g^2(x)$

5.  $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \{ \{g(x) < 0, f(x) \geq 0 \} \cup \{g(x) \geq 0, f(x) > g^2(x)\}$

6.  $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \{ \{g(x) < 0, f(x) \geq 0 \} \cup \{g(x) \geq 0, f(x) \geq g^2(x)\}$

#### Разбор решения заданий тренировочного модуля

##### Пример 1.

Решим уравнение:  $\sqrt{x} = x - 2$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$x = (x - 2)^2$ , которое не будет равносильно исходному уравнению, потому что у этого уравнения два корня  $x_1 = 1, x_2 = 4$ , а у первоначального уравнения только один корень  $x=4$ .

№1.

Подчеркните корни данного уравнения

$$\sqrt[4]{1-x^4} = \sqrt[4]{1-x^2}$$

1. 0; 1
2. -1;0;1
3. -1;0

Решим данное уравнение.

$$\{1-x^4 \geq 0 \quad 1-x^2 \geq 0 \quad 1-x^4 = 1-x^2$$

Получаем три корня из последнего уравнения: -1;0;1

Верный ответ: 2

1. 0; 1
2. -1;0;1
3. -1;0

Пример 2.

$$\text{Решите уравнение: } \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-3}$$

**1 способ:**

Рассмотрим область определения функций:

$$\{x-5 \geq 0 \quad 2x-3 \geq 0$$

$$\{x \geq 5 \quad x \geq 1,5$$

$$x-5=2x-3$$

$x=-2$ , но  $-2$  не входит в область определения функций, следовательно, решений нет.

Ответ: решений нет.

**2 способ:**

$$x-5=2x-3$$

$$x=-2$$

Проверка:

$$\sqrt{-2-5} = \sqrt{-7}, -7 < 0$$

$$\sqrt{2(-2)-3} = \sqrt{-7}, -7 < 0$$

Значит,  $x=-2$  - посторонний корень

Ответ: решений нет

### Практическая часть

1. Решить уравнения

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.31.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{2x-11} = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.32.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{7-x} = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.33.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{10-x} = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.34.** Найдите корень уравнения  $\sqrt{-16-8x} = 4$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.35.** Найдите корень уравнения  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{8}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.36.** Найдите корень уравнения  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.37.** Найдите корень уравнения  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{7}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**1.6.38.** Найдите корень уравнения  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{10}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

Вариант I

Решить уравнение (1—12).

1.  $\boxed{4} \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}.$
2.  $\boxed{4} \sqrt{1-x} = x+1.$
3.  $\boxed{4} \sqrt{x+11} = x-1.$
4.  $\boxed{4} \sqrt{x^2+x+4} = 4.$
5.  $\boxed{5} \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1.$
6.  $\boxed{5} \sqrt{5-x} - \sqrt{5+x} = 2.$
7.  $\boxed{5} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4.$
8.  $\boxed{5} \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1.$
9.  $\boxed{5} \sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6.$
10.  $\boxed{6} \sqrt{5x-3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}.$
11.  $\boxed{4} \sqrt[3]{x^3-7} = 1.$
12.  $\boxed{6} \sqrt[4]{17x^2-16} = x.$

Решить уравнение относительно  $x$  (13—15).

13.  $\boxed{5} \sqrt{x} = a.$
14.  $\boxed{6} \sqrt{x-1} = a.$
15.  $\boxed{6} \sqrt{x} = 1+a.$

Выяснить с помощью графика, сколько корней имеет уравнение (16—18).

16.  $\boxed{5} \sqrt{x} = 6-x^2.$
17.  $\boxed{6} \sqrt{x+1} = (x-1)^2.$
18.  $\boxed{7} x^3 - 2 = \sqrt{x-1}.$

Решить уравнение (19—21).

19.  $\boxed{7} \sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$
20.  $\boxed{7} x + \sqrt{2x^2-7x+5} = 1.$
21.  $\boxed{8} 5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2+5x+4.$

Вариант II

Решить уравнение (1—12).

1.  $\boxed{4} \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-1}.$
2.  $\boxed{4} \sqrt{x+1} = 1-x.$
3.  $\boxed{4} \sqrt{x+10} = x-2.$
4.  $\boxed{4} \sqrt{x^2-x-3} = 3.$
5.  $\boxed{5} \sqrt{3x+4} - \sqrt{x} = 2.$
6.  $\boxed{5} \sqrt{12+x} - \sqrt{1-x} = 1.$
7.  $\boxed{5} \sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9.$
8.  $\boxed{5} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+8} = 1.$
9.  $\boxed{5} \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1.$
10.  $\boxed{6} \sqrt{7x-5} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x-3}.$
11.  $\boxed{4} \sqrt[3]{19-x^3} = 3.$
12.  $\boxed{6} \sqrt[4]{13x^2-36} = x.$

Решить уравнение относительно  $x$  (13—15).

13.  $\boxed{5} \sqrt{x} = -a.$
14.  $\boxed{6} \sqrt{x+2} = a.$
15.  $\boxed{6} \sqrt{x} + 3 = a.$

Выяснить с помощью графика, сколько корней имеет уравнение (16—18).

16.  $\boxed{5} \sqrt{x} = 4-x^2.$
17.  $\boxed{6} \sqrt{x-1} = (x-2)^2.$
18.  $\boxed{7} x^3 - 1 = \sqrt{x+1}.$

**Вариант I**

Решить уравнение (1—12).

1.  $\boxed{4} \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}.$
3.  $\boxed{4} \sqrt{x+11} = x-1.$
5.  $\boxed{5} \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1.$
7.  $\boxed{5} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4.$
9.  $\boxed{5} \sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6.$
10.  $\boxed{6} \sqrt{5x-3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}.$
11.  $\boxed{4} \sqrt[3]{x^3-7} = 1.$
12.  $\boxed{6} \sqrt[4]{17x^2-16} = x.$

2.  $\boxed{4} \sqrt{1-x} = x+1.$
4.  $\boxed{4} \sqrt{x^2+x+4} = 4.$
6.  $\boxed{5} \sqrt{5-x} - \sqrt{5+x} = 2.$
8.  $\boxed{5} \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1.$

**Вариант II**

Решить уравнение (1—12).

1.  $\boxed{4} \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-1}.$
3.  $\boxed{4} \sqrt{x+10} = x-2.$
5.  $\boxed{5} \sqrt{3x+4} - \sqrt{x} = 2.$
7.  $\boxed{5} \sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9.$
9.  $\boxed{5} \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1.$
10.  $\boxed{6} \sqrt{7x-5} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x-3}.$
11.  $\boxed{4} \sqrt[3]{19-x^3} = 3.$
12.  $\boxed{6} \sqrt[4]{13x^2-36} = x.$

2.  $\boxed{4} \sqrt{x+1} = 1-x.$
4.  $\boxed{4} \sqrt{x^2-x-3} = 3.$
6.  $\boxed{5} \sqrt{12+x} - \sqrt{1-x} = 1.$
8.  $\boxed{5} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+8} = 1.$