**Определения, теоремы, следствия по геометрии 8 класса.**

1. **Определение ломаной.**
* **Ломаной** называется фигура, состоящая из смежных отрезков не лежащих на одной прямой.

Отрезки, из которых составлена ломанная, называются ее **звеньями**, а концы этих отрезков – **вершинами ломанной**.

* Сумма длин всех звеньев называется **длиной ломаной**.
* Если концы ломаной совпадают, то ломаная называется **замкнутой**.
1. **Определение многоугольника.**
* Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется **многоугольником**, ее звенья называются **сторонами многоугольника**, а длина ломанной называется **периметром многоугольника**.
* Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются **соседними**.
* Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю многоугольника.**
* Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется **внутренней областью многоугольника**, а другая – **внешней областью многоугольника**.
1. **Определение *n*-угольника.**
* Многоугольник с *n* вершинами называется ***n*-угольником**. Он имеет *n* сторон.
1. **Определение выпуклого многоугольника.**
* Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.
* **Сумма углов выпуклого *n*-угольника** равна (*n-*2)·180°.
1. **Определение внешнего угла выпуклого многоугольника.**
* **Внешним углом выпуклого многоугольника** называется угол, смежный с углом многоугольника.
* **Сумма внешних углов выпуклого многоугольника** равна 360°.
1. **Определение четырехугольника.**
* **Четырехугольник** – геометрическая фигура, которая имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали.

Четырехугольники бывают выпуклые и невыпуклые.

Две несмежные стороны четырехугольника называются противоположными.

Две вершины, не являющиеся соседними, называются противоположными.

* **Сумма углов выпуклого четырехугольника** равна 360°.
1. **Определение параллелограмма.**
* **Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
1. **Свойства параллелограмма.**
2. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
4. **Признаки параллелограмма.**
5. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
6. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
7. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.
8. **Определение трапеции.**
* **Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие стороны – **боковыми сторонами**.

1. **Определение равнобедренной трапеции.**
* Трапеция называется **равнобедренной**, если ее боковые стороны равны.
1. **Определение прямоугольной трапеции.**
* Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной**.
1. **Определение прямоугольника.**
* **Прямоугольником** называется параллелограмм,у которого все углы прямые.
1. **Свойство прямоугольника.**
* Диагонали прямоугольника равны.
* Обратное утверждение. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.
1. **Определение ромба.**
* **Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.
1. **Свойство ромба.**
* Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
1. **Определение квадрата.**
* **Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны.
1. **Свойства квадрата.**
2. Все углы квадрата прямые.
3. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.
4. **Определение точек симметричных относительно прямой.**
* **Две точки *А* и *А1* называются симметричными относительно прямой *а***, если эта прямая проходит через середину отрезка АА1 и перпендикулярна к нему.

 *А*

 *а*

 *А1*

1. **Определение фигуры симметричной относительно прямой.**
* **Фигура называется симметричной относительно прямой а**, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой *а* также принадлежит этой фигуре.
* Прямая *а* называется **осью симметрии фигуры.**
1. **Определение точек симметричных относительно точки.**
* **Две точки *А* и *А1* называются симметричными относительно точки О**, если О – середина отрезка АА1.

А О А1

1. **Определение фигуры симметричной относительно точки.**
* **Фигура называется симметричной относительно точки О**, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки О также принадлежит этой фигуре.
* Точка О называется **центром симметрии фигуры**.
1. **Определение площади многоугольника.**
* Площадь многоугольника – это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.
1. **Основные свойства площадей.**
* Равные многоугольники имеют равные площади.
* Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
* Площадь квадрата равна квадрату его стороны.
1. **Определение равновеликих многоугольников.**
* Если площади двух многоугольников равны, то эти многоугольники называются **равновеликими**.
1. **Определение равносоставленных многоугольников.**
* Если один многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из низ составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называются **равносоставленными**.
1. **Теорема Бойяи-Гервина.**
* Если два многоугольника равновеликие, то они равносоставленные.
1. **Площадь прямоугольника.**
* Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
1. **Площадь параллелограмма.**
* Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Одну из сторон параллелограмма условимся называть **основанием**, а перпендикуляр, проведенный из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, - **высотой параллелограмма**.

1. **Площадь треугольника.**
* Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Одну из сторон треугольника условимся называть **основанием**, а **высотой** **треугольника** условимся называть высоту треугольника, проведенную к основанию.

1. **Следствия теоремы о площади треугольника.**
2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

$$S=\frac{1}{2}AC∙BC$$

1. Если высоты двух треугольников равны, то и площади относятся как основания.

$$\frac{S}{S\_{1}}=\frac{AB}{A\_{1}B\_{1}}$$

1. **Теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.**
* Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

$$\frac{S}{S\_{1}}=\frac{AB∙AC}{A\_{1}B\_{1}∙A\_{1}C\_{1}}$$

1. **Площадь трапеции.**
* Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

**Высотой трапеции** условимся называть перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. $S=\frac{1}{2}(AD+BC)∙BH$.

1. **Теорема Пифагора.**
* В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. $c^{2}=a^{2}+b^{2}$.
1. **Теорема, обратная теореме Пифагора.**
* Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.
1. **Определение пифагоровых треугольников.**
* Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются **пифагоровыми треугольниками**.
1. **Определение египетского треугольника.**
* Треугольник со сторонами 3, 4, 5 называют **египетским треугольником**.
1. **Формула Герона.**
* **Площадь *S* треугольника** со сторонами *a, b, c* выражается формулой $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ – полупериметр треугольника.
1. **Определение отношения отрезков.**
* **Отношением отрезков** *AB* и *CD* называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$.
1. **Определение пропорциональности отрезков.**
* Отрезки *AB* и *CD* **пропорциональны** отрезкам *A1B1* и *C1D1*, если$\frac{AB}{A\_{1}B\_{1}}=\frac{CD}{C\_{1}D\_{1}}$.
1. **Определение сходственных сторон треугольника.**
* Если у двух треугольников *∆ABC* и *∆A1B1C1* углы соответственно равны: *∠A=∠A1, ∠B=∠B1, ∠C=∠C1,* то стороны $AB и A\_{1}B\_{1}, BC и B\_{1}C\_{1}, CA и C\_{1}A\_{1}$называются **сходственными**.
1. **Определение подобных треугольников.**
* Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника. Обозначается *∆ABC ~ ∆A1B1C1.*

Т.е. треугольники *∆ABC* и *∆A1B1C1* подобны, если *∠A=∠A1, ∠B=∠B1, ∠C=∠C1,* $\frac{AB}{A\_{1}B\_{1}}=\frac{BC}{B\_{1}C\_{1}}=\frac{CA}{C\_{1}A\_{1}}=k$.

* Число *k,* равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется **коэффициентом подобия**.
1. **Теорема об отношении площадей подобных треугольников.**
* Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. $\frac{S}{S\_{1}}=k^{2}$.
1. **Первый признак подобия треугольников.**
* Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
1. **Второй признак подобия треугольников.**
* Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
1. **Третий признак подобия треугольников.**
* Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.
1. **Определение средней линии треугольника.**
* **Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.
1. **Теорема о средней линии треугольника.**
* Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.
1. **Определение средне пропорционального отрезка.**
* Отрезок *XY* называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) для отрезков *AB* и *CD*, если$XY=\sqrt{AB∙CD}$.
1. **Свойства пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике.**
2. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.$CD=\sqrt{AD∙DB}$. C

 A D B

2) Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.$AC=\sqrt{AB∙AD}$.

1. **Определение подобия произвольных фигур.**
* Фигуры *F* и *F1* называются **подобными**, если каждой точке фигуры *F* можно сопоставить точку фигуры *F1* так, что для любых двух точек *M* и *N* фигуры *F* и сопоставленных им точек *M1* и *N1* фигуры *F1* выполняется равенство $\frac{MN}{M\_{1}N\_{1}}=k$, где *k* - одно и то же положительное число для всех точек.

Предполагается, что каждая точка фигуры *F1* оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры *F*.

* Число *k* называется **коэффициентом подобия фигур *F* и *F1*.**
1. **Определение центрального подобия (гомотетии).**
* Каждой точке *M* фигуры *F* сопоставляется точка *M1* плоскости так, что точки *M* и *M1* лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке *О*, причем *OM=k·OM1*. В результате такого сопоставления получается фигура *F1* , подобная фигуре *F*. В этом случае фигуры *F* и *F1* называются **центрально-подобными**, а само описанное сопоставление называется **центральным подобием** или **гомотетией**.

 О M M1

 F

 F1

1. **Определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.**  В

$$α$$

 А С

* **Синусом острого угла прямоугольного треугольника** называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. $\sin(А)=\frac{BC}{AB}$.
* **Косинусом острого угла прямоугольного треугольника** называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. $\cos(A)=\frac{AC}{AB}$.
* **Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника** называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.$tgA=\frac{BC}{AC}$**.**
* **Тангенс угла** равен отношению синуса к косинусу этого угла. $tgA=\frac{sinA}{cosA}$.
1. **Теорема о равенстве синусов, косинусов и тангенсов равных острых углов прямоугольных треугольников.**
* Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

Т.е. если *∆ABC* и *∆A1B1C1* - два прямоугольных треугольника, *∠C* и *∠C1* – прямые углы, *∠A=∠A1* - равные острые углы, то

 $\sin(А)=\sin(А\_{1}, \cos(А=\cos(А\_{1}, tgA=tgA\_{1})))$.

1. **Основное тригонометрическое тождество.**
* $sin^{2}A+cos^{2}A=1$**.**
1. **Значение синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **α** | **30°** | **45°** | **60°** |
| **sinα** | $$\frac{1}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ |
| **cosα** | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{1}{2}$$ |
| **tgα** | $$\frac{\sqrt{3}}{3}$$ | 1 | $$\sqrt{3}$$ |

1. **Взаимное расположение прямой и окружности.**

*d* - расстояние от центра окружности до прямой, *r* – радиус окружности.

* Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности (*d<r*), то прямая и окружность имеют две общие точки.

В этом случае прямая называется **секущей** по отношению к окружности.

* Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности (*d=r*), то прямая и окружность имеют только одну общую точку.
* Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности (*d>r*), то прямая и окружность не имеют общих точек.
1. **Определение касательной к окружности.**
* Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной к окружности**, а их общая точка называется **точкой касания прямой и окружности**.

 О

 А

 *p*

*p* – касательная к окружности с центром в точке *О*, *А* – точка касания.

1. **Свойство касательной к окружности.**
* Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.
1. **Определение отрезков касательных, проведенных из одной точки.**
* Рассмотрим две касательные к окружности с центром *О*, проходящие через точку *А* и касающиеся окружности в точках *В* и *С*.

Отрезки *АВ* и *АС* называются **отрезками касательных**, проведенных из точки *А*. В

 О А

 С

1. **Свойство отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки.**
* Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности. Т. е. **АВ=АС и ∠ВАО=∠САО**.
1. **Признак касательной к окружности.**
* Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.
1. **Определение полуокружности.**
* Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности.
1. **Определение центрального угла.**
* Угол с вершиной в центре окружности называется ее **центральным углом**.
1. **Градусная мера дуги окружности.**
* Если дуга *АВ* окружности с центром *О* меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера равна градусной мере центрального угла *АОВ*.
* Если дуга *АВ* больше полуокружности, то ее градусная мера равна ***360°-∠АОВ***.
* Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360°.
1. **Определение вписанного угла.**
* Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.
1. **Теорема о вписанном угле.**
* Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

*Следствие 1*: Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

*Следствие 2*: Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, - прямой.

1. **Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд.**
* Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды. ***AE·BE=CE·DE***

 C

 E B

 A

 D

1. **Теорема о биссектрисе угла.**
* Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

*Обратно*: Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

*Следствие 1*: Геометрическим местом точек плоскости, лежащих внутри неразвернутого угла и равноудаленных от сторон угла, является биссектриса этого угла.

*Следствие 2*: Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

1. **Определение серединного перпендикуляра к отрезку.**
* **Серединным перпендикуляром к отрезку** называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.
1. **Теорема о серединном перпендикуляре к отрезку.**
* Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

*Обратно*: Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

*Следствие 1*: Геометрическим местом точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

*Следствие 2*: Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

1. **Теорема о пересечении высот треугольника.**
* Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.
1. **Замечательные точки треугольника.**
* Точка пересечения медиан

Точка пересечения биссектрис *замечательные*

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам *точки*

Точка пересечения высот *треугольника*

1. **Определение вписанной окружности.**
* Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной в многоугольник**, а многоугольник **описанным около этой окружности**.

 О

1. **Теорема об окружности, вписанной в треугольник.**
* В любой треугольник можно вписать окружность.

*Замечание 1*: В треугольник можно вписать только одну окружность.

*Замечание 2*: Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности. $S=\frac{AB+BC+CA}{2}∙r$

*Замечание 3*: Не во всякий четырехугольник можно вписать окружность.

1. **Свойства четырехугольника описанного около окружности.**
* В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.$AB+CD=BC+AD$**.**

Обратно: Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

1. **Определение описанной окружности.**
* Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной около многоугольника**, а многоугольник – **вписанным в эту окружность**.

 О

1. **Теорема об окружности, описанной около треугольника.**
* Около любого треугольника можно описать окружность.

*Замечание 1*: Около треугольника можно описать только одну окружность.

*Замечание 2*: Около четырехугольника не всегда можно описать окружность.

1. **Свойства четырехугольника вписанного в окружность.**
* В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Обратно: Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.