|  |
| --- |
| **Приёмы нахождения**  **граничных значений параметра при графическом методе решения.**  Задание №18 ЕГЭ профильного уровня по математике – это задание высокого уровня сложности, которое ориентировано на учащихся с высоким уровнем математической культуры. Но, вместе с тем, решение именно задач с параметром развивает исследовательские навыки и повышает математическую культуру учащихся.  Все мы знаем, как мал процент выпускников, приступивших к решению этого задания на ЕГЭ, тем более решивших его. Это объясняется, наряду со многими объективными причинами (малое количество часов на изучение темы, например), и тем, что многие учащиеся боятся этих заданий. Их пугает само слово «параметр». Но, тем не менее, есть ученики, которые стремятся получить высокие баллы на ЕГЭ и проявляют интерес к таким заданиям.  По критериям оценивания, если даже задание полностью не решено, а найдены граничные значения параметра, то можно получить хотя бы 1 балл. При решении многих заданий нередко граничными значениями параметра являются те из них, которые соответствуют точке касания графиков. В предлагаемом материале рассматриваются приемы нахождения таких значений:   1. геометрический; 2. используя формулу расстояния от точки до прямой; 3. через производную функции; 4. алгебраический.   Вот краткие теоретические сведения, которыми должны владеть учащиеся при решении заданий, предложенных ниже.        Рис.1  (рис.1)   1. Рассояние от точки до прямой вычисляется по формуле   .      Рис.2  – касательная к графику функции , проведенная в точке с абсциcсой (рис.2). Тогда верна следующая система:  т.е.   1. Если графики функций и касаются, то уравнение имеет единственное решение.   **Задача 1.** При каких значениях параметра уравнение имеет ровно  два решения.  Решение.  Рассмотрим функции и . По условию задачи графики этих функций должны иметь только две общие точки. Графиком функции является полуокружность с центром в точке и . А второй график – «семейство» «галочек» с вершиной в точке (рис.3).  Рис.3  При общих точек нет. Следовательно, у уравнения нет корней. Две общие точки графики имеют, если «галочка» касается полуокружности.  Рассмотрим . . Пусть , тогда .  . Отсюда получаем, что . , т.е. и подставим координаты точки в уравнение прямой получим .  Если «галочка » проходит через точку , то у графиков 4 общие точки.  *.*  Далее при уменьшении значения графики имеют две общие точки, т.е. . Итак, и – искомые значения.  **Ответ:**  **Задача 2.** Найдите все значения , при котором система  имеет единственное решение.  Решение.  Графиком первого уравнения является окружность с центром в точке и . Графиком второго уравнения «пучок» прямых, проходяших через точку (рис.4).  Рис.4  Система имеет единственное решение, если прямая касается окружности. Значение параметра при этом найдем, использя формулу расстояния от точки до прямой.  Рассояние от точки до прямой равно радиусу окружности,  т.е. .  **Ответ:**  **Задача 3.** Для каждого значения параметра определите число решений уравнения  .  Решение.  Введем функции .  Первый график – это график функции , скользящий по оси влево (при ) или вправо (при ) (рис.5).  Рис.5  При уравнение имеет два решения, т.е. графики пересекаются в двух точках. Обозначим через абсциссу точки касания прямой и кривой и запишем условия касания:      Уравнение не имеет решений, если ; имеет одно решение, если , ; имеет два решения, если .  **Ответ: нет решений, если ;**  **одно решение, если ;**  **два решения, если .**  **Задача 4.** Найдите значения , при котором система  имеет ровно три решения.  Решение.  Рассмотрим расположение графиков функций при различных значениях (рис.6).  3  1  0  1  5  2  -1  X  Y  Рис.6  При графики не пересекаются. При имеют одну общую точку . При увеличении значения «уголок» перемещается влево и пересекает кривую в двух точкакх до тех пор, пока при прямая не пройдет через точку  . Далее до момента касания прямой с ветвью параболы графики имеют три общие точки. Определим значение параметра в точке касания алгебраически: уравнение имеет единственнный корень.  Итак, система имеет ровно три решения при .  **Ответ: .**  **Тренировочные задачи.**   1. Найдите все значения параметра , при которых система уравнений   имеет ровно восемь решений.  Ответ: .   1. Найдите все значени\я параметра , при каждом из которых система уравнений   имеет более двух решений.  Ответ:.   1. Найдите все значения параметра , при каждом из которых система уравнений   имеет более двух решений.  Ответ: .   1. Для каждого значения параметра определите число решений уравнения   Ответ: при система решений не имеет; при – одно решение; при – два решения.   1. При каких значениях параметра уравнение имеет три решения?   Ответ: .   1. Найдите все значения параметра , при каждом из которых система уравнений   имеет ровно три различных решения.  Ответ:   1. Найдите все значения параметра , при которых система уравнений   имеет единственное решение.  Ответ: .  **Самостоятельная работа.**  **Задание 1.**  При каких значениях параметра система    не имеет решений?  **Задание 2.**  При каких значениях параметра система уравнений  имеет восемь решений?  **Задание 3.**  Для каждого значения параметра определить число решений уравнения  **Решение заданий самостоятельной работы.**  **Задание 1.**  **При каких значениях параметра система**    **не имеет решений?**  **Решение:**  Рис.7  Решением неравенства является круг с центром в точке A(3;-4) и радиусом в совокупности с точкой E(-3,5;4,5).  Графиком уравнения является «пучок» прямых, проходящих через точку C(0;1) (рис.7).  Система не имеет решений, если прямая проходит внутри угла BCD.  Для того, чтобы найти граничные значения параметра воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой: .  При у системы не будет решений.  **Ответ:**  **Задание 2. При каких значениях параметра система**  **имеет восемь решений?**  **Решение:**  Рис.8  График первого уравнения – ромб (рис.8). Его легко построить, отобразив относительно осей координат отрезок прямой , отсекаемый от нее осями координат.  Второе уравнение задает на графике окружность радиуса .  Радиус окружности, касающейся сторон ромба, можно найти как высоту прямоугольного треугольника :  .  При имеем четыре общие точки графиков, при – восемь точек пересечения, при – шесть точек, при – четыре точки, при – две точки, при – точек пересечения нет.  Итак, 8 решений система имеет при , т.е. при или .  **Ответ:**  **Задание 3.**  **Для каждого значения параметра определить число решений уравнения**  Рис.9  **Решение:**  Построим графики функции (рис.9).  График функции - ветвь параболы.  График функции  *-* «пучок» прямых, проходящих через начало координат.  Граничные значения параметра найдем с помощью производной.  Приравняем производные функций:  - абсцисса точки касания.  Приравняем значения функций в точке касания:    , то  **Ответ: нет решений;**  **одно решение;**  **два решения.**  **Примеры из Открытого банка заданий ЕГЭ по математике.**   1. При каких значениях параметра система уравнений   имеет более двух решений.  **Ответ: (1;2)**   1. При каких значениях параметра система уравнений   имеет ровно три различных решения.  **Ответ: 10 4 24**   1. При каких значениях параметра система уравнений   имеет единственное решение.  **Ответ: (2;6].**  4.При каких значениях параметра уравнение на промежутке имеет более двух корней.  **Ответ: ( )**  5.При каких значениях параметра уравнение имеет единственный корень.  **Ответ: [ ); 0.**  6.При каких значениях параметра система уравнений  имеет более одного решения.  **Ответ: [5** |

**Литература.**

1. С.В. Буфеев. Графический метод решения экзаменационных задач с параметром. Математика в школе, №4, 2011г.

2. Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцев. Математика. ЕГЭ 2017. Книга 2. Профильный уровень. М.: Народное образование, 2017г.

3. Материалы сайта alexlarin.net.

4. Материалы модульных курсов «Задачи с параметром» при МаГУ (Магнитогорский государственный университет),2012г., октябрь, лектор: А.С. Великих, канд.физ.-мат. наук, доцент.

5. Материалы Открытого банка заданий ЕГЭ.

Материал подготовила Усманова И.Р., учитель математики МОУ «СОШ № 1» города Магнитогорска Челябинской области, эксперт предметной комиссии ЕГЭ.