**Итак, задачи 14 из ЕГЭ – 2018. Какие же это задачи?**

Рассмотрим методы решения стереометрических задач № 14 ЕГЭ профильного уровня для трех типов:

1. задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми,
2. задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью,
3. задачи на нахождение угла между двумя плоскостями.

Так как, я считаю, что векторно-координатный метод является более рациональным, то я сформулировала алгоритмы решения стереометрических задач данным методом по озвученной теме.

**Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми**:

1) мы ввели прямоугольную систему координат,

2) нашли координаты нужных точек,

3) затем нашли координаты направляющих векторов прямых и

4) вычислили косинус угла между ними.

Следующий алгоритм несущественно отличается от предыдущего.

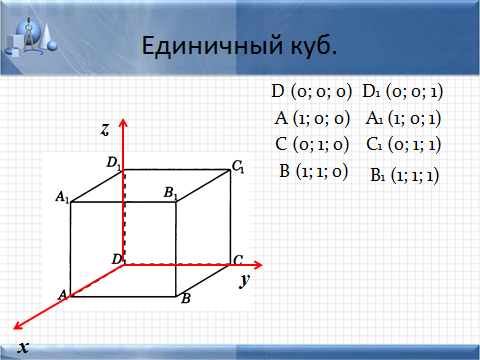
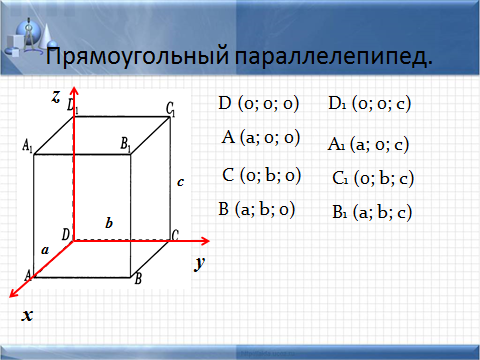
**Алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью.**

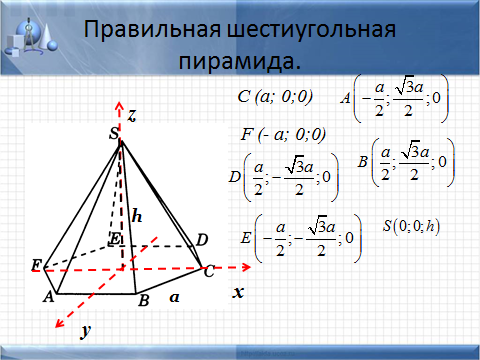
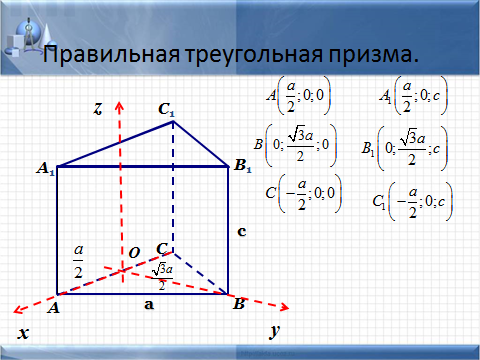
Третьим шагом мы должны ввести нормальный вектор к плоскости и найти его координаты, а затем вычислить синус искомого угла. Он равен косинусу угла между направляющим вектором прямой и вектором нормали к плоскости.

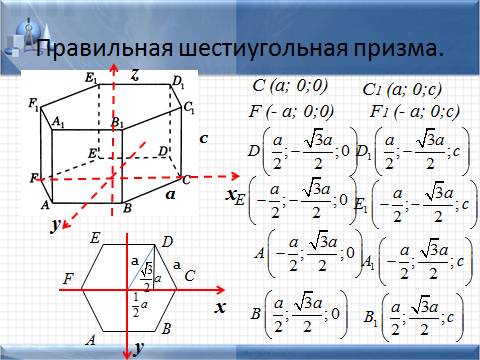
При решении задачи на нахождение угла между двумя плоскостями, необходимо найти координаты нормальных векторов к заданным плоскостям и вычислить по формуле модуль косинуса угла между этими векторами.

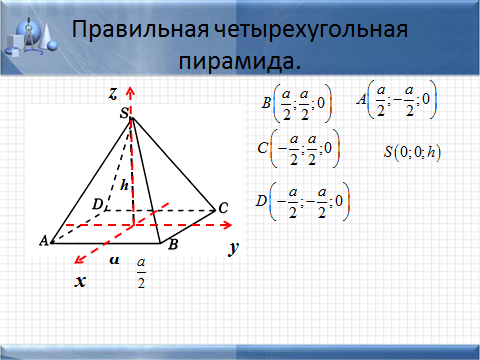
Для решения задач необходимо научиться находить координаты вершин основных многогранников при помещении их в прямоугольную систему координат.

Ниже представлены координаты вершин некоторых *многогранников*, помещенных в систему координат.









1. ***Задача на нахождение угла между двумя скрещивающимися прямыми.***

• *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.

• 0˚ < ∠(*a*;*b*)≤ 90˚ .

• *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.

• Две прямые называются *перпендикулярными*,

если угол между ними равен 90˚ .

• *Угол между параллельными прямыми* считается равным нулю.

• При нахождении угла между прямыми используют:

1) формулу cosφ =  для нахождения угла φ между прямыми *m* и *l* , если стороны *а* и *b* треугольника *АВС* соответственно параллельны этим прямым;

1. формулу cosφ = или в координатной форме

cosφ =

для нахождения угла φ между прямыми *m* и *l* , если векторы (х1;у1;z1) и (х2;у2;z2) параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые *m* и *l* были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы = 0 или x1·x2 + y1·y2+z1·z2 = 0.

**Пример 1.**

*В кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между прямыми A1D и D1E, где Е – середина ребра CC1 .*

**Решение.**

**1-й способ**.

Пусть *F* – середина ребра *ВВ1* , *а* –ребро куба, φ - искомый угол.

Так как *A1 F* ǁ *D1 E*  , то φ - угол при вершине *A1* в треугольнике *A1FD*.

Из треугольника *BFD* имеем

*FD*2 = *BD*2 + *BF*2= 2*a*2 + = ,

 а из треугольника *A1B1F*  получаем

*A1 F 2* = *A1B12* + *B1F 2* = *a2* + = , откуда

*A1F* =

Далее в треугольнике *A1FD* используем теорему косинусов

*FD*2 = *A1D 2* + *A1F 2* –2 *A1D ·* *A1F*cosφ,

*= 2а2 +-*  2 · · cosφ , откуда

cosφ = и φ = arccos .

***Ответ***: arccos .

**2-й способ.**

Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке.

Не нарушая общности задачи, обозначим длину ребра куба а.

Тогда А1(0; а; а), D(а; а; 0), D1(а; а; а),

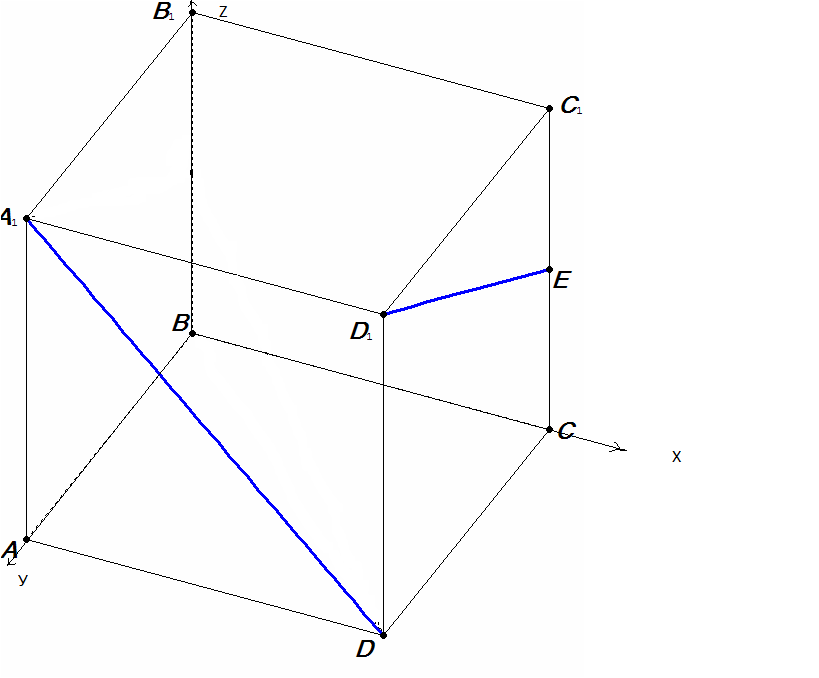
Е(а; 0; ).

Найдём координаты направляющих векторов прямых A1D и D1E

= , = .

Тогда

сosφ = = = .

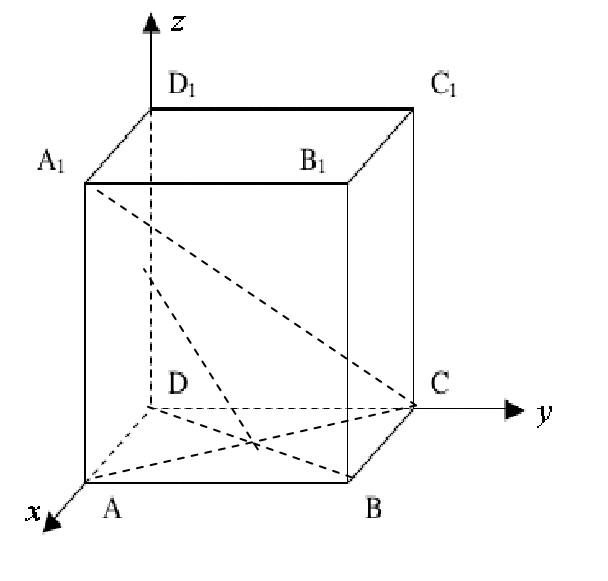
****

cosφ = и φ = arccos .

***Ответ***: arccos .

**Пример 2:**

*Точка О лежит на ребре DD1 куба ABCDA1B1C1 D1, точка Р является точкой пересечения диагоналей грани ABCD. DO : DD1 = 1 : 5. Найдите косинус угла между прямой ОР и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины С.*

**Решение.**

Поместим куб в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Условно обозначим грани куба за единицу. Если обозначить её какой-либо буквой, она всё равно

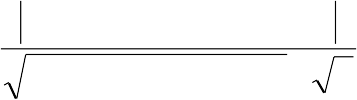
О сократится. Определим координаты точек Р, О, С и А1:

Р(0,5; 0,5; 0), О(0; 0; 0,2),

P С(0; 1; 0), А1(1; 0; 1).

Отсюда *ОР* 0,5;0,5;0,2, *А*1*С*1;1;-1

*сos* 

0,5 1  0,5 1  0,2 1 =2

0,52+0,52+0,22 3 9

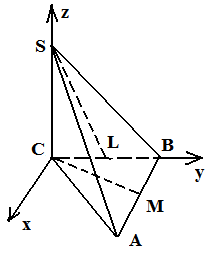
**Ответ:** 2 /9

**Пример 3:**

*Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC,*

*сторона которого равна 2 2 . Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости*

*основания и равно 1. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и и середину ребра ВC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.*

**Решение.**

Поместим пирамиду в декартову систему координат.

Найдём координаты точек S, L, C и M: S(0;0;1), L(0; 2 ;0), C(0;0;0). Чтобы найти

координаты точки М, воспользуемся геометрией: в

равностороннем треугольнике все углы равны 60˚, а т. М, которая делит сторону АВ пополам, является не только медианой, но и биссектрисой, поэтому *АСМ*  *МСВ*  30 .

Для равностороннего треугольника

*h*  *a*

3  2 2 

4 4

3  6 ,

2

х(СМ)=СМ·соs60˚=

6  1 

6 , у(СМ)=СМ·соs30˚= 6 

3  3 2 ,

 2 2 4 2 2 4



*СМ* {

6 ; 3

4

2 ;0 }, SL{0; 2 ;-1}

4

Решая аналогично предыдущим примерам, находим, что

**Ответ:** 45˚**.**

*сos*  2 .

2

***Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью.***

• *Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой* называется угол между этойпрямой и ее проекцией на данную плоскость.

• 0˚ < ∠(*a*;α ) < 90˚ .

• Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90˚ .

• Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0˚ .

Угол между прямой *l* и плоскостью α можно вычислить:

1) если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

2) по формуле sinφ = или в координатной форме

sin φ = , где

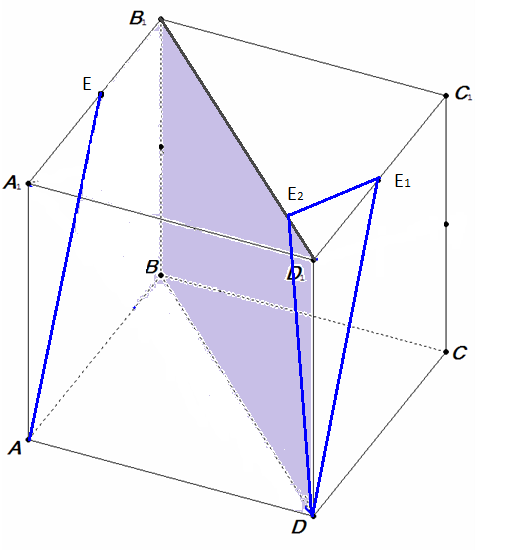
*(x1* ; *y1* ; *z1)* - вектор нормали плоскости α ,

*(x2* ; *y2* ; *z2)* - направляющий вектор прямой *l*;

• прямая *l* и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда

*x1 x2* + *y1 y2* + *z1 z2* = 0 .

**Пример.**



*В кубе ABCDA1 B1 C1 D1 точка Е – середина ребра A1 В1 . Найдите синус угла между прямой АЕ и плоскостью ВDD1 .*

***Решение.***

**1-й способ.**

Угол между прямой АЕ и плоскостью *ВDD1* будем искать как угол между данной плоскостью и прямой DЕ1, параллельной прямой АЕ.

Из точки Е1 опустим перпендикуляр Е1Е2 на прямую В1D1.

Искомый угол – это угол между прямыми DE2 и DE1.

Пусть сторона куба равна а.

А1С1 = а.

Е1Е2 = · А1С1 = · а = .

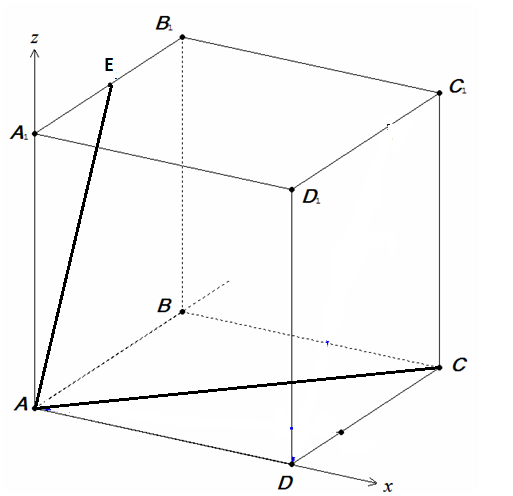
DE1 = = .

= = : = = = .

*Ответ*: .

**2-й способ.**

Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке.

Не нарушая общности задачи, обозначим длину ребра куба а.

За вектор нормали плоскости *ВDD1* возьмем вектор

Найдём координаты нужных точек.

А(0; 0; 0), Е(0; ; а), С(а; а; 0).

Тогда = , = .

sin φ = = = .

*Ответ*: .

***3) Задача на нахождение угла между двумя плоскостями.***

• Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

• Величина двугранного угла принадлежит промежутку (0˚ ;180˚ ).

• Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку (0˚ ;90˚ ].

• Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0˚ .

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

2) как угол треугольника, если удается включить линейный угол в некоторый треугольник;

3) как угол между перпендикулярными им прямыми;

4) по формуле

или в координатной форме

где (

**Пример.**

*Основание прямой четырехугольной призмы ABCDA1B1C1D1 - прямоугольник ABCD, в котором АВ = 12, AD = . Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD1, если расстояние между прямыми AC и B1D1 равно 5.*

**Решение.**

**1-й способ**.

Решение этой задачи вычислительно-аналитическим методом очень громоздкое и сложное, даже выполнить чертеж к этой задаче крайне сложно, поэтому я его не привела, а методом координат эта задача решается легко и просто.

**2-й способ**.

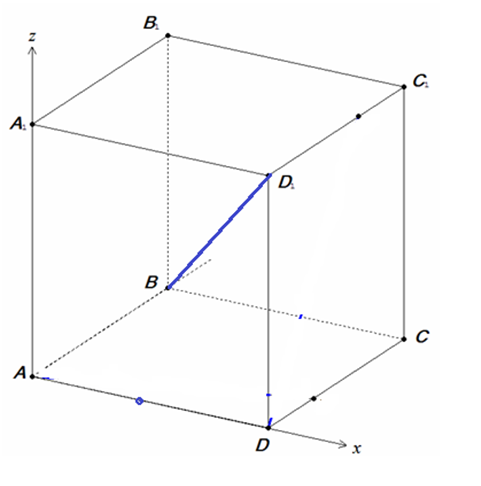
Легко видеть, что этот угол равен углу между нормалями к этим плоскостям.

Вектор – вектор нормали плоскости основания.

А вектором нормали плоскости, проходящей через середину ребра АD перпендикулярно прямой ВD1 будет вектор.

Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке.

Найдём координаты нужных точек, т.е. точек А, А1, В, D1.

А (0; 0; 0), А1(0; 0; 5), В(0; 12; 0),

D1(; 0; 5).

Тогда = , = .

= = =

= = .

Ответ: .