**Сборник подготовки к ОГЭ «Элементарные функции»**

Начиная с 7 класса, в центре внимания школьной математики находится понятие функции. На практике мы часто встречаемся с зависимостями между различными величинами не только в математике, но и в других сферах деятельности. С помощью графиков наиболее естественно отражаются функциональные зависимости одних величин от других.

Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать сложные задачи, а порой является единственным средством их решения. Однако на базе основной школы материал, связанный с этим вопросом, представлен несколько хаотично, изучается недостаточно полно, многие важные моменты не входят в программу. Размеры школьного учебника, количество часов, выделяемых на изучение темы "Функция" в разных классах, не позволяют показать в сколько-нибудь полном объёме всё многообразие задач, требующих для своего решения функционального подхода, научить учащихся глубоко понимать и использовать свойства функций, выполнять геометрические преобразования графиков, строить кусочно-заданную функцию.

С другой стороны, основным направлением модернизации математического школьного образования является отработка механизмов итоговой аттестации через введение единого государственного экзамена. Авторы контрольно-измерительных материалов ЕГЭ и ОГЭ уделяют много внимания проверке умений читать по графику свойства функции, использовать их в решении уравнений и неравенств. Тесты итоговой аттестации за курс основной школы предполагают наличие у школьников подобных знаний, поэтому необходимо формировать основы этих знаний. Мониторинг результатов сдачи ОГЭ показал, что большинство учащихся делают серьёзные ошибки в заданиях, относящихся к теме «Функции», не умеют читать графики, а некоторые и не приступают к выполнению заданий по данной теме. Одним из решений проблемы совершенствования навыков решения заданий, посвященных одному из основных понятий современной математики – функциональной зависимости, сможет стать сборник тестовых заданий по данной теме.

 Сборник состоит из теоретической части, в которую входит справочный материал и задания для активного обучения, и практической части. Практическая часть распределена по темам (Линейная функция, Квадратичная функция, Обратная пропорциональность, Степенная функция, Кусочно-заданная функция, Функция, содержащая модуль, Комбинации графиков функций в заданиях ОГЭ) и уровням сложности базовый уровень и повышенной сложности. Ко всем заданиям даны ответы.

Задания направлены на проверку умений:

* составлять уравнения прямых и парабол по заданным условиям;
* решать задачи геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические представления;
* строить графики уравнений с двумя переменными;
* строить графики изученных функций и отвечать на вопросы, связанные с их исследованием;
* на основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выбитыми» точками и т.п.»
* использовать графические представления и свойства функций для решения математических задач из других разделов курса (например, для исследования систем уравнений).

Мы считаем, что, в конечном счете, только учитель, работающий в классе, может лучше всех определить уровень своей проверочной работы, ориентируясь в основном на следующие моменты:

- учесть некоторый обязательный для всех учащихся уровень требований;

- разработать проверочную работу с учётом особенностей данного класса и своих собственных суждений и вкусов;

- распределить материал по степеням трудности так, чтобы, с одной стороны, «троечник» мог сам получить свою «3», а с другой стороны, хорошему ученику не было бы уж так легко заработать свои «4» или «5» и перейти к «тиражированию» своих наработок.

В каждом пункте сборника задания представлены на двух уровнях, в соответствии с уровнями заданий в экзаменационной работе на базовом и на 2 балла. Впрочем, необходимо отметить, что степень трудности, как знают педагоги, - вещь достаточно условная и зависящая как от взглядов учителя, так и от уровня классов в целом.

Учитель может использовать задания сборника для проведения контрольных, самостоятельных работ или как домашние контрольные работы для самопроверки. Кроме того, сборник заданий снабжен «Заданиями для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами), которые помогут разобраться в сложном задании не только ученику, но и начинающему учителю, определить пути решения подобных заданий. Предложенные решения, разумеется, не являются единственно возможными.

**1.Теоретическая часть**

**1.1. Справочник**

**Элементарные преобразования графиков функций** — термин используемый в школьной программе для обозначения линейных преобразований функции или её аргумента вида *y* = α*f*(γ*x* + δ) + β. Применяется также для обозначений операций с использованием [модуля](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0).

|  |  |
| --- | --- |
| **Общий вид функции** | **Преобразования** |
| *y* = *f*(*x* − *a*) | Параллельный перенос графика вдоль оси [абсцисс](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D1%86%D0%B8%D1%81%D1%81%D0%B0) на | *a* | единиц * вправо, если *a* > 0;
* влево, если *a* < 0.
 |
| *y* = *f*(*x*) + *a* | Параллельный перенос графика вдоль оси [ординат](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B0) на | *a* | единиц * вверх, если *a*> 0,
* вниз, если *a* < 0.
 |
| *y* = *f*( − *x*) | Симметричное отражение графика относительно оси ординат. |
| *y* = − *f*(*x*) | Симметричное отражение графика относительно оси абсцисс. |
| *y* = *f*(*kx*) | * При *k*> 1 — сжатие графика к оси ординат в *k* раз,
* при 0 < *k* < 1 — растяжение графика от оси ординат в *k* раз.
 |
| *y* = *kf*(*x*) | * При *k*> 1 — растяжение графика от оси абсцисс в *k* раз,
* при 0 < *k* < 1 — сжатие графика к оси абсцисс в 1 / *k* раз.
 |
| *y* = | *f*(*x*) | | * При f(x)\geqslant 0— график остаётся без изменений,
* при *f*(*x*) < 0 — график симметрично отражается относительно оси абсцисс.
 |

**1.2. Задания для активного обучения**

(с комментариями, решениями и ответами)

Задание 1. Прямая у=кх + b пересекает ось Ох в точке (3; 0), а ось Оу в точке (0; 9). Запишите уравнение этой прямой. Проходит ли эта прямая через точку (- 1; 11)?

 *Решение*: Если задана точка, лежащая на оси Оу, то коэффициент в известна и равна ординате точке, то есть в= 9. Для того чтобы найти коэффициент к, нужно подставить координаты точки (3; 0) в уравнение у=кх+в, к= -3.

 Уравнение прямой можно найти и другим способом, прямая проходит через две точки, поэтому их координаты (3; 0) и (0; 9) удовлетворяют уравнению прямой:

 $\left\{\begin{array}{c}0=3к+в,\\9=в \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}к=-3\\в=9 \end{array}\right.$

 Уравнение прямой у=-3х+9

 Прямая у=-3х+9 не проходит через точку (-1; 11), так как ее координаты не удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, 11≠-3(-1) +9

 *Ответ*: у=-3х+9. Прямая не проходит через точку (-1; 11).

Задание 2: Прямая параллельная прямой у=-4х, касается параболы у= х2-2. Вычислите координаты точки касания.

 *Решение:* с помощью условия параллельности прямой у=4х и касательной к параболе получим, что уравнение касательной имеет вид

у= -4х+b.

 Касательная к параболе и парабола имеют одну общую точку, следовательно, система уравнений должна иметь единственное решение:

$\left\{\begin{array}{c}у= -4х+b,\\у= х^{2}-2 ;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}у= -4х+b, \\ х^{2}-2=-4х+b;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}у= -4х+b, \\х^{2}+4х-(b+2)=0.\end{array}\right.$

Второе уравнение системы имеет единственное решение, когда его дискриминант равен нулю 24+4b=0, b= - 6.

Уравнение касательной к параболе имеет вид у= -4х- 6.

Найдем координаты точки касания:

$\left\{\begin{array}{c}у= -4х- 6,\\у= х^{2}-2 ;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}у= -4х- 6, \\ х^{2}-2=-4х- 6;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}у= -4х- 6, \\х^{2}+4х+4=0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}х= -2,\\у=2 \end{array}\right.$

 *Ответ*: (-2; 2)

Задание 3: Постройте график функции Укажите наименьшее значение этой функции.
 Решение. График — парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты вершины: 
(В решении должны быть вычислены координаты еще нескольких точек, в том числе точки пересечения параболы с осью у.) Наименьшее значение функции равно –3.
 Замечание. Учащийся может вычислить координаты вершины параболы и другим способом.
 Комментарий. В случае отсутствия вычислений в чистовике при правильном построении параболы решение должно быть засчитано.

Ответ: график изображен на рисунке; унаим. = –3.

Задание 4: Парабола с вершиной в точке (-1; 2) проходит через точку с координатой (1; 8). В каких точках парабола пересекает ось абсцисс?

 *Решение:* Уравнение параболы удовлетворяют координаты двух заданных в условии точек:

 $\left\{\begin{array}{c}2=\left(-1\right)^{2}а+b\left(-1\right)+с,\\8=а+b+с ; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}2=а-b+с,\\8=а+b+с;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}2=а-b+с,\\6=2b; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}b=3, \\а+с=5.\end{array}\right.$

Точка (-1; 2) является вершиной параболы, значит по формуле координаты вершины параболы ха=-$\frac{b}{2a}$, -1=- $\frac{b}{2a}$, b=2а. получим, что b= 2а = 3, значит а=1,5.

 Имеем b=3, а=1,5, коэффициент с найдем из второго уравнения системы с=3,5. Уравнение параболы имеет вид у=1,5х2+3х+3,5. Для того чтобы определить, в каких точках парабола пересекает ось абсцисс, нужно решить уравнение 1,5х2+3х+3,5=0. Дискриминант этого уравнения меньше нуля, поэтому уравнение корней не имеет, следовательно, парабола не пересекает ось абсцисс.

 *Ответ:* у=1,5х2+3х+3,5; пересечений с осью Ох нет.

Задание 5: При каком значении параметра k парабола у=4х2+12х+k касается оси абсцисс?

 *Решение*: Найдем абсциссу точки касания. Так как касание возможно только в вершине, то найдем абсциссу вершины: ха= - $\frac{b}{2a}$ = - $\frac{12}{8}$= - $\frac{3}{2}$. Вершина параболы лежит на оси абсцисс, поэтому ордината вершины равна нулю: 0= 4·$\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}+12∙\left(-\frac{3}{2}\right)+$k. Отсюда найдем k: k=9.

 *Ответ:* 9

Задание 6: Найдите все значения k, при которых прямая y=kx пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условиями: 
 Решение. Построим ломаную, заданную условиями:
Прямая y=kx пересекает в трех различных точках эту ломаную, если ее угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку (−3;−2), и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямым y =2x−8 и y=2x+4. Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку (−3;−2): −2 = −3k , k = 2/3. Угловой коэффициент k прямой, параллельной прямой y=2x−8, равен 2. Прямая y=kx имеет с ломаной три общие точки при 2/3 < k < 2.
 Ответ: 2/3 < k < 2. Другие возможные формы ответа: 
Задание 7: Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению ($\left|х\right|$+у)(ху-2)=0.

 *Решение:* Решением уравнения ($\left|х\right|$+у)(ху-2)=0 является решение уравнения у= - $\left|х\right|$ или уравнения у=$ \frac{2}{х}$. точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

 ($\left|х\right|$+у)(ху-2)=0, лежат на гиперболе у=$ \frac{2}{х}$ , на луче у=х, х$\in $[-∞; 0] и на луче у= -х, х$\in $[0; ∞].

*Ответ:* Графиком является объединение гиперболы у=$ \frac{2}{х}$ и графика функции у= -$\left|х\right|$.

Задание 8: Постройте график функции |у|=|2|х|-3|-1.

Запишем порядок построения: у1=|х|, у2=2|х| - растяжение вдоль оси Оу в 2 раза. у3=2|х|-3 – сдвиг вниз на 3. у4=|2|х|-3| - симметрия точек графика, для которых у2<0, относительно оси Ох. у5=|2|х|-3|-1 – параллельный перенос вдоль оси Оу на -1. у6=| у5| - симметрия точек, для которых у5≥0 относительно оси Ох.

Задание 9: Найдите множество значений функции у=1- $\sqrt{9-\sqrt{2х²+6\sqrt{2х}+9}}$

 *Решение:*
$у=1-\sqrt{9-\sqrt{(\sqrt{2х}+3)²}}$; $у=1-\sqrt{9-|\sqrt{2х}+3|}$; так как $\sqrt{9-|\sqrt{2х}+3|}$

принимает значения [0;3], то -2≤у≤1.

 *Ответ:* [-2;1]

**2. Практическая часть** содержит примеры заданий по разделам и уровню сложности, а так же ответы к ним **(Приложение 1)**

 Надеемся, что данное пособие поможет девятиклассникам систематизировать свои знания по математике, узнать особенности заданий, предлагающихся на экзамене по математике, а также поможет самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

**Список литературы**

1. Кочетков, Е. С. Алгебра и элементарные функции [Текст]: учеб. пособие для учащихся 9 кл. / Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. – М.: Просвещение, 1972. – 351 с.
2. Кузнецова, Л. В. Алгебра [Текст]: сб. заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 кл. / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Т. В. Колесникова, Л. О. Рослова. – М.: Просвещение, 2014. – 192 с.
3. Математика. 8-9 классы [Текст]: сборник элективных курсов. Вып. 2/ Авт.- сост. М. Е. Козина. – Волгоград: Изд-во Учитель, 2006. – 135 с.
4. Федеральный институт педагогических измерений. Открытый банк заданий ОГЭ по математике: раздел Функции [Электронный ресурс], - <http://85.142.162.126>
5. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс] : раздел Преподавание математики / Линейная функция и её график; М. А. Никифорова. – М.: ИД «Первое сентября», 2009. – Режим доступа : <http://festival.1september.ru/articles/100779/>